1. Dinámica Relativista
2. Masa y Energía

Dinámica Relativista

Los principios de conservación de la Física Clásica han demostrado su gran aplicabilidad y validez en el campo de los fenómenos ordinarios, en los cuales intervienen cuerpos "grandes" (en relación con las partículas elementales) que se mueven "lentamente" (respecto a la rapidez de la luz en el vacío).
Estos principios de conservación reflejan leyes generales de la Naturaleza y establecen que algunas cantidades físicas como la energía o el momentum, no pueden crearse de la nada sino que en un sistema cerrado, solamente se transforman o se transmiten de una parte a otra del sistema, manteniéndose constante la cantidad total.

Por eso, es muy tentador suponer que éstos principios de conservación continúen siendo verdaderos en el campo de la relatividad especial. De hecho se propone que asi sea y en particular se retiene la definición del *momentum lineal* $\vec{p} = m \cdot (\vec{v})$ y su principio de conservación:

Suma total de momentums iniciales $\left(\sum_i \vec{p_i}\right) = \left(\sum_f \vec{p_f}\right)$ ***Suma total de momentums finales***

Esto significa que en cualquier sistema de referencia, el momentum lineal total de un sistema físico permanece constante al pasar de un estado inicial a otro estado final, siempre y cuando no actúen sobre el sistema fuerzas externas a él.

Éste principio físico vale para cualquier fenómeno natural, asi que consideremos uno sencillo: Un choque perfectamente elástico entre dos objetos A y B que, cuando están en reposo, son *idénticos* y tienen la misma masa M .

Consideremos entonces que A se encuentra inicialmente en reposo respecto a un sitema inercial O, mientras que el objeto B se mueve junto con otro sistema de referencia inercial O', que se desplaza respeto a O a velocidad constante en la dirección X,X'. Obviamente para el observador de O' el objeto B está en reposo.

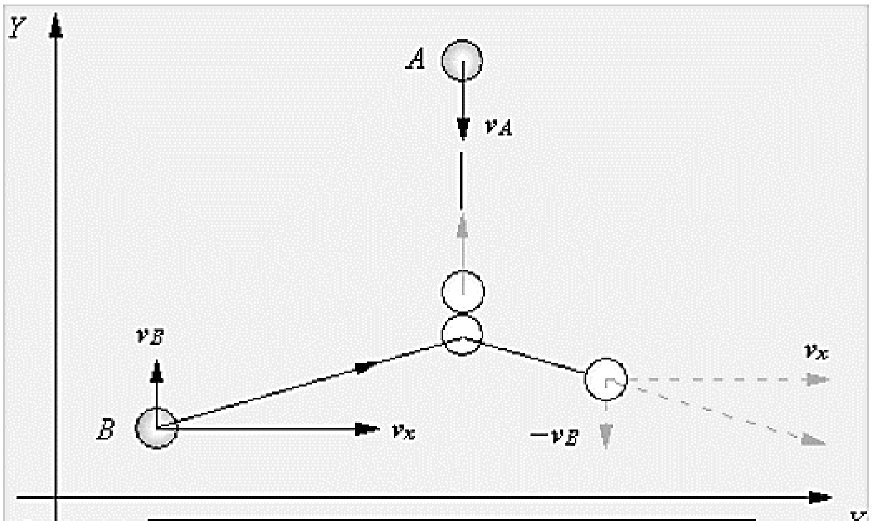
Supongamos entonces que los observadores O y O' acuerdan realizar el siguiente experimento :

1° O lanzará verticalmente (en la dirección Y-Y') al objeto A con una rapidez u (medida respectoa su propio sistema de referencia) y O' lanzará en la misma dirección al objeto B con la misma rapidez u (respecto a su sistema de referencia) para que choquen entre si.

2° Debido a que la situación es simétrica, ambos observadores estarán describiendo el mismo fenómeno físico y por lo tanto, llegarán a las mismas conclusiones.
Además en su propio sistema de referencia, el momentum lineal se conserva, esto significa que la rapidez final de los objetos después del choque en la dirección vertical, es la misma que tenían antes del choque, solo que con sentido opuesto.

De esta manera, el choque elástico entre los objetos A y B según lo ve el observador O del sistema inercial que está en reposo sería como sigue:

Dado que O' se mueve respecto a O hacia la derecha a la velocidad constante v_x , al observador O le parece que el objeto B se mueve diagonalmente antes y después del choque, mientras que el objeto A que él mismo lanza sólo rebota verticalmente.



El choque entre A y B según el observador O

Puesto que el momentum lineal P en la dirección vertical se conserva, O establecerá que:

$$P_{inicial} = P_{final}$$

$$\left[(M_B)\cdot v_B - (M_A)\cdot v_A \right] = \left[(M_A)\cdot v_A - (M_B)\cdot v_B \right]$$

es decir. . .

$$(M_B)\cdot v_B = (M_A)\cdot v_A$$

Donde M_A y M_B se refieren a las masas de los objetos A y B medidas por el observador O.

Por otra parte, de la transformación relativista de velocidades (2.9) , tomando $u_y = v_B$, $u_y' = u$ y $u_x = 0$, se deduce que:

$$u_y = \frac{u_y'}{\gamma\cdot\left[1 + \frac{v_x\cdot(u_x')}{c^2}\right]} \longrightarrow v_B = \frac{u}{\gamma\cdot\left[1 + \frac{v_x\cdot(0)}{c^2}\right]} = \frac{u}{\gamma} = u\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{v_x}{c}\right)^2}$$

y tomando en cuenta también que $v_A = -u$, la conservación de momentum queda:

$$(M_B)\cdot\left(\frac{u}{\gamma}\right) = (M_A)\cdot u \qquad (*)$$

Pero si se supone que las masas de éstos objetos idénticos son iguales ($M_A = M_B$) independientemente de su estado de movimiento como usualmente se hace en la Mecánica Clásica, entonces la ecuación anterior es una contradicción:

$$\frac{(M_B)}{\gamma} = (M_A) \qquad (**)$$

puesto que la constante γ tiene un valor diferente de la unidad siempre que exista movimiento relativo entre los observadores O y O' ($v_x \neq 0$).

Si queremos salvar el principio de la conservación del momentum lineal, tenemos que aceptar que M_A y M_B no son iguales, aunque se trate de objetos idénticos que tienen la misma masa cuando están en reposo. Lo más congruente entonces es proponer que: *la masa de un objeto es una función de la rapidez de ese objeto.*

De acuerdo con ésta idea, el observador O propondrá que la relación (**) es válida en la forma :

$$\frac{M_B(V)}{\gamma} = M_A(u)$$

Donde las masas dependen de sus rapideces respectivas, siendo u la rapidez del objeto A y $V = \sqrt{(v_B)^2 + (v_x)^2} = \sqrt{\left(\frac{u}{\gamma}\right)^2 + (v_x)^2}$ la rapidez total del objeto B respecto al sistema de referencia en reposo.

Consideremos ahora el límite cuando la velocidad u tiende a cero . En éste caso los dos objetos A y B estarán en reposo respecto a su propio sistema de referencia y . . .

$M_A(0) = M_o$ es la masa medida en reposo para el objeto A

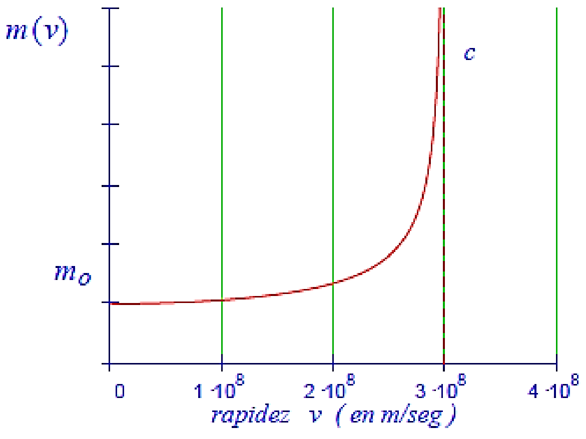
$M_B\left[\sqrt{\left(\frac{0}{\gamma}\right)^2 + (v_x)^2}\right] = M(v_x)$ es la masa medida para el objeto B , idéntico al A pero que se mueve respecto a O a la velocidad v_x .
Es una función de v_x y de ahora en adelante la denotaremos simplemente por M .

De esta manera, la relación (**) nos conduce a otra conclusión relativista sorprendente:

$$M = \gamma \cdot M_o \qquad (2.14)$$

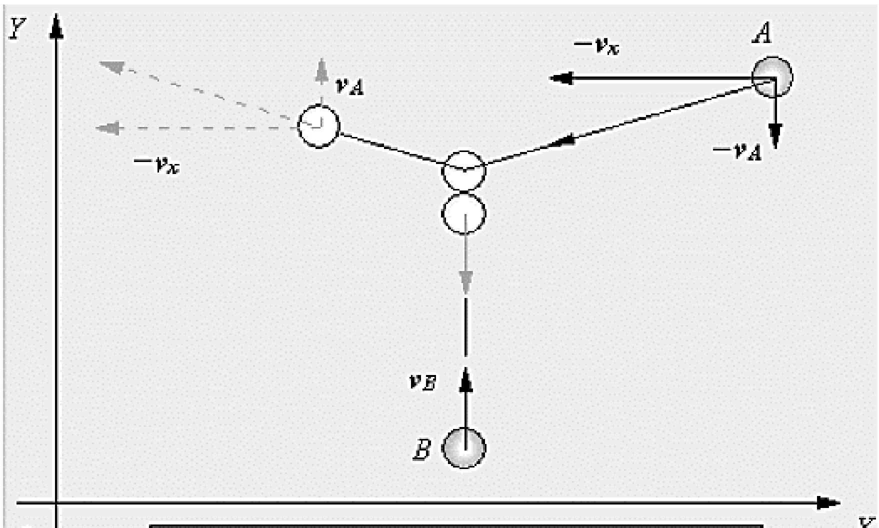
$$M = \frac{M_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x}{c}\right)^2}}$$

" *la masa medida para un objeto B que está en movimiento es mayor que la masa medida para ese objeto (A) cuando está en reposo.* $M > M_o$ "



Nuevamente notemos la importancia fundamental que la velocidad c desempeña en ésta expresión, como un límite físico para la rapidez con la que se puede mover un cuerpo con masa. La masa relativista (2.14) está definida sólamente si tal cuerpo tiene una rapidez menor que la velocidad máxima c $(v_x < c)$.
A medida que la velocidad de un cuerpo se aproxima a la velocidad de la luz, su masa crece infinitamente. El único objeto físico que se puede mover con la rapidez c es la "luz" (ondas electromagnéticas) en el vacío.

Desde el punto de vista del observador O´, en movimiento respecto del observador O, el choque se vería:



El choque entre A y B según el observador O'

Dado que el cuerpo A está en reposo en el sistema O, para el observador O' estará en movimiento hacia la izquierda, mientras que el objeto B parte del reposo y se impulsa inicialmente hacia arriba para chocar con A. Asi que haciendo un análisis silimar al que hizo el observador O en su propio sistema de referencia, O' llegará a concluir que:

"*La masa del objeto A que yo veo en movimiento uniforme es mayor que la masa de un objeto B idéntico que tengo en reposo en mi propio laboratorio o sistema de referencia*"

y preguntar otra vez ¿Cual de los dos observadores tiene razón y cual no? , es una pregunta que carece de sentido, puesto que las dos conclusiones reflejan una realidad objetiva que es verdadera para cada observador.

La ecuación (2.14) has sido comprobada cabalmente para el movimiento de las partículas atómicas y elementales que se mueven a una velocidad cercana a la velocidad de la luz.
Experimentalmente se ha comparado la masa de los electrones "rápidos" que se mueven a una velocidad enorme con la masa de los electrones a bajas velocidades. Los resultados han confirmado totalmente la dependencia relativista entre la masa y la velocidad.
Por lo tanto la expresión relativista del momentum lineal para un objeto de masa en reposo m_0 que se mueve a la velocidad v es:

$$p = m \cdot v = \left[\frac{m_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] \cdot v \qquad (2..15)$$

En consecuencia, la segunda ley de Newton, ley básica y fundamental para todos los fenómenos mecánicos toma la forma:

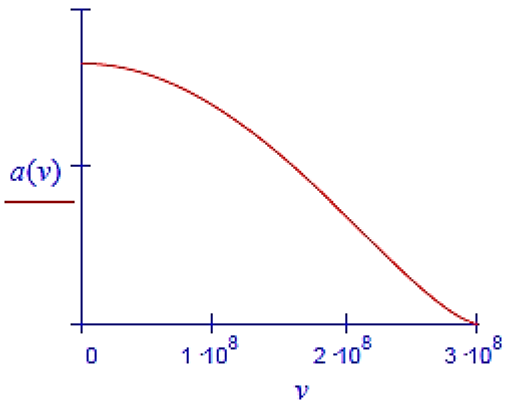
$$F = \frac{d \cdot p}{dt} = m_o \cdot \left[\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v \right) \right] \qquad (2.16)$$

Asi que como el momentum lineal ya no es directamente proporcional a la velocidad, la fuerza , que es la razón temporal del cambio de momentum lineal, tampoco es ya directamente proporcional a la aceleración. Una fuerza constante no produce una aceleración constante. Por ejemplo cuando una fuerza constante en la dirección X se aplica a un cuerpo que se mueve también en la dirección X, la ecuación (2.16) dá :

$$F = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_o \cdot v(t)}{\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}}\right] = m_o \cdot \left[\frac{\frac{d}{dt}v(t)}{\left[1-\frac{(v(t))^2}{c^2}\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}}\right] = \left[\frac{m_o}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}\right]\cdot a \qquad (2.16_a)$$

donde a es la eceleración en la dirección X . Despejándola se obtiene :

$$a = \frac{F}{m_o}\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$



Entonces, al aumentar la velocidad v del cuerpo, la aceleración que le produce una fuerza constante *disminuye continuamente* tendiendo a cero cuando v se aproxima a la velocidad de la luz

Por grande que sea la fuerza aplicada será entonces imposible acelerar un cuerpo de masa en reposo m_o no nula a una velocidad igual o mayor que c

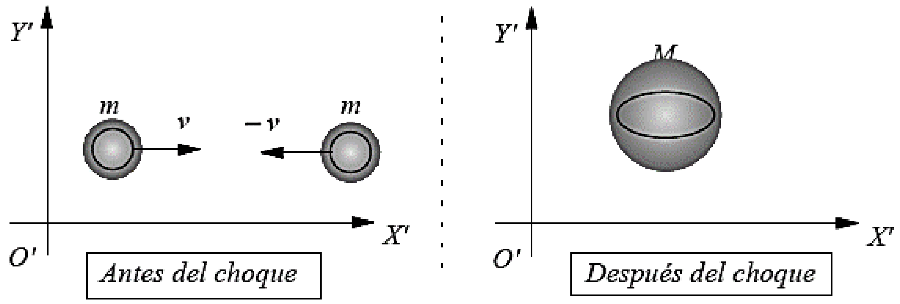
En algunos aceleradores usados en la física de partículas elementales o en la física nuclear, las partículas se mueven uniformemente en trayectorias circulares. Entonces, siendo su rapidez v constante, la acleración y la fuerza centrípetas son perpendiculares a la velocidad. En éste caso la fuerza no realiza trabajo sobre la partícula y permanecen por lo tanto constantes su energía cinética y su *rapidez* es decir el denominador de la ecuación (2.16) permanece constante (no asi el numerador dado que v es un vector y cambia de dirección) y queda :

$$F = \left[\frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right]\cdot\left(\frac{d}{dt}v\right) = \left[\frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right]\cdot a \qquad (2.16_b)$$

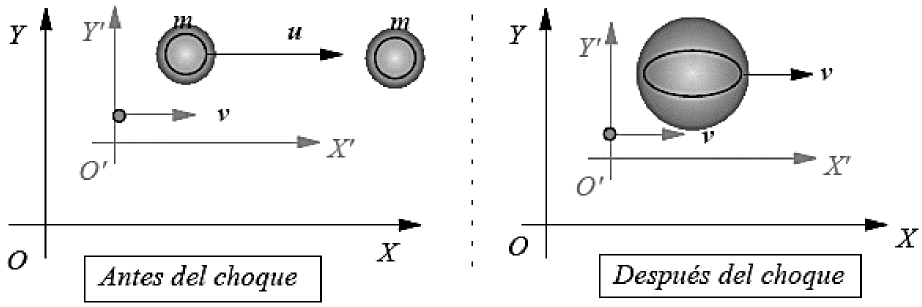
En el caso de que la fuerza F y la velocidad v no son ni perpendiculares ni colineales entre si, debemos descomponer la fuerza en las componentes paralela y perpendicular a v , y la aceleración resultante tendrá componentes dadas por las ecuaciones (2.16_a) y (2.16_b) que no serán proporcionales a las componentes de la fuerza neta aplicada, es decir, *la aceleración resultante no será paralela a la fuerza neta* como en el caso de la Mecánica Clásica.

Masa y Energía

Describiremos ahora un choque *totalmente inelásitico* entre un par de partículas, que son idénticas (de la misma masa) cuando están en reposo.
Que el choque sea inelástico significa que al final de la colisión, las partículas quedarán unidas formando una sola.
Escojamos un sistema de referencia O' tal que la partícula resultante quede en reposo al final del choque. Desde ésta referencia, dado que el momentum lineal final es cero, también lo será el inicial, es decir observaremos dos partículas idénticas que se mueven en sentidos opuestos a la misma rapidez:



Este mismo choque, en otro sistema de referencia O desde el cual O' está en movimiento hacia la derecha ($+\,v$) de manera que una de las partículas antes del choque se vea aquí en reposo sería como sigue:



Aquí la velocidad de la primera partícula antes del choque es , de acuerdo con (2.8)

$$u = \frac{u_x' + v_x}{\left[1 + \frac{v_x\cdot\left(u_x'\right)}{c^2}\right]} = \frac{v+v}{1+\frac{v\cdot v}{c^2}} = \frac{2\cdot v}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

De donde, resolviendo para v se obtiene:

$$v = \frac{c^2}{u}\cdot\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right) \qquad (\,*\,)$$

Aplicando el principio de la conservación del momentum lineal en el sistema O,

$$P_{inicial} = P_{final}$$

$$m \cdot u + m_o \cdot 0 = M \cdot v$$

$$m \cdot \left(\frac{2 \cdot v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \right) = M \cdot v \qquad (**)$$

Si al igual que en la mecánica Clásica, simplemente suponemos que la masa de un objeto es constante y se conserva: $(M = 2m)$, entonces la ecuación anterior es falsa. Sin embargo no podemos negar los principios de relatividad de la cual la hemos derivado, asi que esta inconsistencia se solventa si se admite que la masa de un objeto puede ser una cantidad variable que depende de la velocidad del objeto:

$$M(v) = m(u) + m_o$$

donde se ha indicado que la masa inicial que está en reposo es m_o. Substituyendo ésta expresión de M en la ecuación (**) se obtiene:

$$m \cdot u = (m + m_o) \cdot v$$

$$\frac{m}{m_o} = \frac{v}{u - v}$$

y substituyendo ahora la expresión (*) para la velocidad v se obtiene :

$$\frac{m}{m_o} = \frac{c^2 \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - 1 \right)}{c^2 \cdot \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right]} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \longrightarrow \boxed{m = m_o \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)} \qquad (2.14')$$

Si ésta expresión para la masa relativista $m = m_o \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ se desarrolla respecto a la variable u

usando el teorema del binomio en la forma:

$$(1 + x)^n = \left[1 + n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot x^3 + .. \right]$$

tomando $x = -\left(\frac{u^2}{c^2} \right)$ y $n = -\left(\frac{1}{2} \right)$, los primeros tres o cuatro términos, son :

$$m = m_o \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{u^4}{c^4} \right) + \frac{5}{16} \cdot \left(\frac{u^6}{c^6} \right) + .. \right] \qquad (***)$$

y aproximando hasta el término de segundo orden . . .

$$m \cdot c^2 \approx m_o \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m_o \cdot u^2$$

Reconocemos de inmediato aqui que el segundo término es la expresión clásica para la energía cinética de un objeto de masa m_o que se mueve a la velocidad constante u .
Dado que éste término representa una energía, sólo puede sumarse con otro término que tenga las mismas dimensiones, además para que una ecuación sea fisicamente consistente, sus dos miembros deben representar cantidades con las mismas dimensiones. Por lo tanto $\left(m_o \cdot c^2\right)$ y $\left(m \cdot c^2\right)$ son términos que representan también una energía.

Entonces, dado que cada uno de los términos de la expansión (***) representan energía, es inmediato afirmar que el miembro izquierdo $m \cdot c^2$ representa la *energía total* E de un cuerpo cuya masa cuando está en reposo es m_o y que se mueve a la velocidad u .

$$E = m \cdot c^2 \qquad (2.17)$$

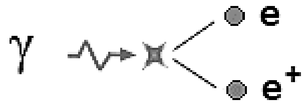
Ya que $E = m \cdot c^2$ representa una energía, se infiere que el término $m_o \cdot c^2$ también es una energía. Esta será la energía que tiene un objeto cuando está en reposo (*energía de reposo* E_o) y que se debe al simple hecho de tener masa.

$$E = \left(\frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right) \cdot c^2 = \frac{m_o \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{E_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$E = \gamma \cdot E_o \qquad (2.17_a)$$

Esta nueva interpretación relaciona dos conceptos que en la física Clásica son totalmente independientes, la masa y la energía. En cambio, en la teoría de la relatividad estos conceptos son equivalentes y *el factor de conversión* entre uno y otro es simplemente el cuadrado de la velocidad de la luz. Esto significa que en la naturaleza existen procesos o fenómenos en los cuales la energía se puede transformar en masa o viceversa , la masa se transforma en energía

Sólo ha sido cuestión de tiempo comprobar que esta equivalencia entre la masa y la energía es totalmente correcta. Se han podido describir fenómenos tales como las *reacciones de fisión o fusión* nucleares, en las cuales una parte de la energía de los reactivos iniciales se transforma en energía liberada (calor, luz , sonido radiación, etc.) quedando los productos de la reacción con menos masa que los núcleos iniciales.
También se ha demostrado que bajo ciertas condiciones, la radiación de alta frecuencia (gamma) puede generar un par de partículas materiales con cargas eléctricas opuestas como el protón-antiprotón, electrón-positrón, etc, es decir se crea siempre una "partícula" junto con su "antipartícula" . La reacción inversa también es posible, una partícula se puede "aniquilar" con su antipartícula y desaparecer ambas, generando en su lugar energía de radiación.



Para reafirmar ésta equivalencia, calculemos ahora en cuanto cambia la masa de un objeto cuya masa en reposo es m_o, cuando hacemos trabajo sobre él para moverlo a partir del reposo hasta que su rapidez es v (medida respecto a la referencia en la que tal objeto estaba en reposo) , aplicándole una fuerza F (variable o constante).

De acuerdo al teorema de la variación de la energía cinética (otro principio físico que conserva su validez en la relatividad), *el cambio en la energía cinética K de un objeto físico es igual al trabajo W realizado sobre el objeto por la fuerza F aplicada a lo largo de la trayectoria que describe tal objeto en movimiento.*

Se tiene asi que entre un estado inicial (i) y un estado final (f):

$$K_f - K_i = W \quad \rightarrow \quad K_f - 0 = \int_i^f F\, ds$$

Nótese que: ds es uno de los elementos diferenciales de la trayectoria, que los vectores F y ds se multiplican escalarmente y que la energía cinética inicial es cero porque el objeto parte del reposo.

Si substituimos en la integral la expresión (2.16), la energía cinética final K_f del objeto o simplemente K es :

$$K = \int_i^f \frac{d\cdot p}{dt}\, ds = \int_i^f \frac{d\cdot(m\cdot v)}{dt}\, ds = \int_0^u (v)\, d(m\cdot v)$$

integrando por partes se llega a:

$$K = m\cdot v\cdot v\cdot \Big|_0^u - \int_0^u (m\cdot v)\, dv$$

introduciendo la expresión (2.14') para la masa relativista m :

$$K = \left[m\cdot(u)^2 - 0\right] - m_o\cdot \int_0^u \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, dv = \left(\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\cdot u^2 - m_o\cdot c^2\cdot\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)$$

$$= \frac{\left(m_o\cdot c^2\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m_o\cdot c^2 = m\cdot c^2 - m_o\cdot c^2$$

$$K = E - E_o \qquad (2..18)$$

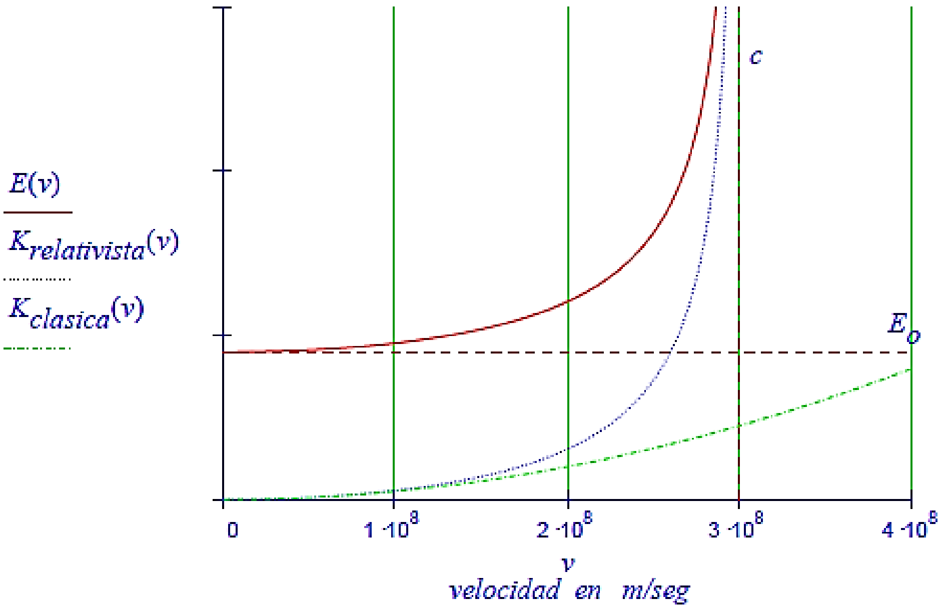
De ésta manera, K la energía cinética relativista de cualquier objeto que tenga cierta masa m_o cuando esté en reposo, es igual a la diferencia entre su energía total relativista E y su energía de reposo E_o .

Podemos asi decir que el "aumento" de masa del objeto debido a su movimiento uniforme es :

$$\left(m - m_o\right) = \frac{K}{c^2}$$

y cuanto mayor sea la rapidez final de un cuerpo en movimiento, mayor será su energía cinética y tanto mayor será también su masa (m) comparada con la que usualmente tiene en reposo (m_o).

Otra vez, podemos ver en ésta ecuación la equivalencia entre la masa y la energía. En éste caso es la energía debida al movimiento (cinética) , la responsable de un cambio de masa en un objeto físico.



Al comparar las energías relativistas con la expresión clásica para la energía cinética $K_{clasica} = \frac{1}{2} \cdot m_o \cdot v^2$ la energía cinética clásica de la mecánica de Newton, es una parábola que aumenta sin límite y tampoco existe límite para la velocidad que pueda alcanzar un objeto físico, la gráfica de $K_{clasica}$ cruza impunemente la recta vertical $v = c$ que representa el valor de la velocidad de la luz en el vacío y sigue aumentando ; sin embargo, la realidad es que aunque aceleremos un cuerpo durante un tiempo infinito, la naturaleza impone una barrera infranqueable a la velocidad que pueda alcanzar ese cuerpo .
En cambio, la energía cinética relativista o la energía relativista total de tal cuerpo, pueden aumentar sin límite pero la rapidez correspondiente a tales energías jamás llegará a ser siquiera igual a la rapidez de la luz en el vacío. A medida que sus energías tienden al infinito, su velocidad se aproxima cada vez más al valor c, sin llegar a ser nunca igual a él.
Hasta ahora, la naturaleza nos ha develado solo un único objeto físico que se puede mover a la rapidez c : la luz en el vacío.

Es importante destacar que a velocidades bajas, la diferencia entre las energías cinéticas clásica y relativista es insignificante. Por ejemplo, para una rapidez tan enorme como $v = 1\,000$ *km/seg* , la diferencia relativa entre las energías cinéticas clásica y relativista es de tan solo 0.000835 % , mientras que para $v = 100\,000$ *km/seg* (la tercera parte de la velocidad de la luz), su diferencia relativa es apenas del 8.43 % .
Las gráficas de $K_{clásica}$ y $K_{relativista}$, prácticamente coinciden una sobre otra cuando $v << c$ y es por eso que la Mecánica de Newton describe tan bien los fenómenos que ocurren en este campo.
Además, para la relatividad especial, aunque un objeto esté en reposo, siempre tendrá asociada una energía distinta de cero ($E_o = m_o \cdot c^2$) , energía que no existe para la Mecánica Clásica.
Hay pruebas experimentales directas de que la energía $m_o \cdot c^2$ asocaida con una masa en reposo existe. Por ejemplo, en el decaimiento de un *pión neutro* π° (una partícula subatómica inestable de masa en reposo m_{π^0}) , el pión desaparece y en su lugar se produce radiación electromagnética de energía exactamente igual a $\left(m_{\pi^o}\right) \cdot c^2$ cuando el pión inicialmente estaba en reposo.

Creación de pares

Una de las posibilidades más interesantes sugeridas por la equivalencia entre la masa y la energía es *la creación de nuevas partículas con masa* a partir de la energía de la radiación o del choque de otras partículas. A primera vista parecería que si de desea crear una partícula de masa en reposo m_o , se debe disponer de la energía $m_o \cdot c^2$ pero se ha observado que en realidad se requiere de mucha más debido principalmente a dos razones:

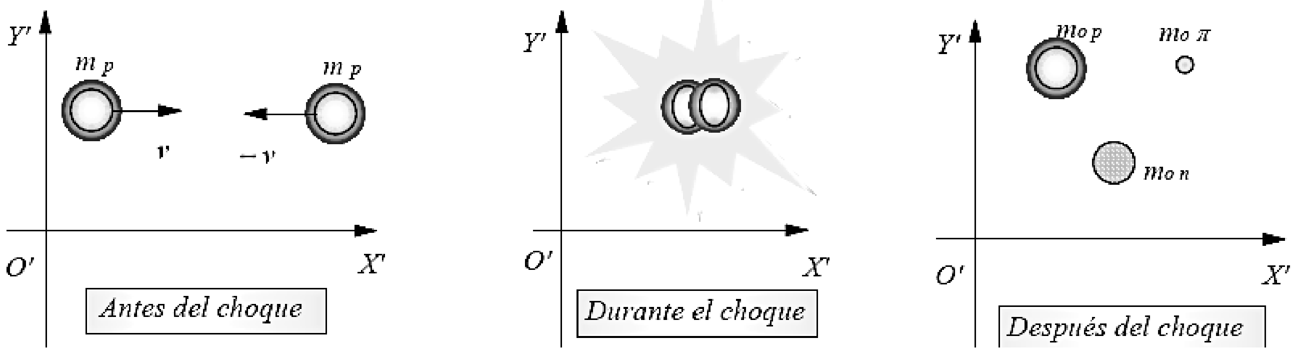
1°. Cuando el proceso de creación es la *radiación*, las partículas atómicas o subatómicas, no pueden crearse solas sin su correspondiente antipartícula porque se violarían algunas leyes naturales como la conservación de la carga eléctrica. Una antipartícula es idéntica a su pareja (partícula) excepto por su momento magnético y por la carga eléctrica que son del mismo valor, pero de signo opuesto. Por ejemplo, al tratar de crear un protón, siempre aparecerá también un antiprotón.

2°. Cuando el proceso de creación es una *colisión*, usualmente intervienen también otras partículas ya existentes, que chocan para generar otra(s) partícula(s). Al final, por conservación de la energía y del momento lineal, una parte de la energía destinada a crear las nuevas partículas aparecerá como energía cinética de los productos.

Aunque la razón 1° es una dificultad que naturalmente no puede evitarse, la razón 2° no es isuperable dado que siempre será posible hacer chocar las partículas iniciales de tal manera que su momentum total sea cero y en consecuencia no se "desperdicie" energía inicial dado que necesariamente la energía cinética final también será cero.
Por ejemplo, cuando dos protones de alta energía chocan entre si, se ha observado que, como productos de ésta reacción se obtiene: un protón (p^+), un neutrón (n^o) y un pión (π^+) una nueva partícula de masa en reposo unas 273 veces la de un electrón y de carga positiva:

$$p^+ + p^+ \longrightarrow p^+ + n^o + \pi^+$$

Analicemos el choque entre los protones respecto a un sistema de referencia donde su momentum lineal total sea nulo, es decir los protones se dirigen uno contra otro con la misma rapidez:



Se han indicado las masas en reposo de las tres partículas finales. La condición que implica la mínima cantidad de energía inicial de los protones con la cual se puede generar un pión durante el choque (energía umbral) es tal que las tres partículas finales quedan en reposo.
Por la conservación de la energía se tiene que:

Energía inicial = Energía final

$$\left[(m_p)\cdot c^2 + (m_p)\cdot c^2 \right] = \left[(m_{op})\cdot c^2 + (m_{on})\cdot c^2 + (m_{o\pi})\cdot c^2 \right]$$

De la ecuación (2.14), la masa de un protón en movimiento es $m_p = \gamma \cdot (m_{op})$ y además, aunque las masas en reposo del neutrón y del protón son ligermente distintas, las consideraremos prácticamente iguales. Asi que

$$2 \cdot \gamma \cdot (m_{op}) \cdot c^2 = 2 \cdot (m_{op}) \cdot c^2 + (m_{o\pi}) \cdot c^2$$

$$2 \cdot \gamma \cdot m_{op} = 2 \cdot m_{op} + m_{o\pi}$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot m_{op} = 2 \cdot m_{op} + m_{o\pi}$$

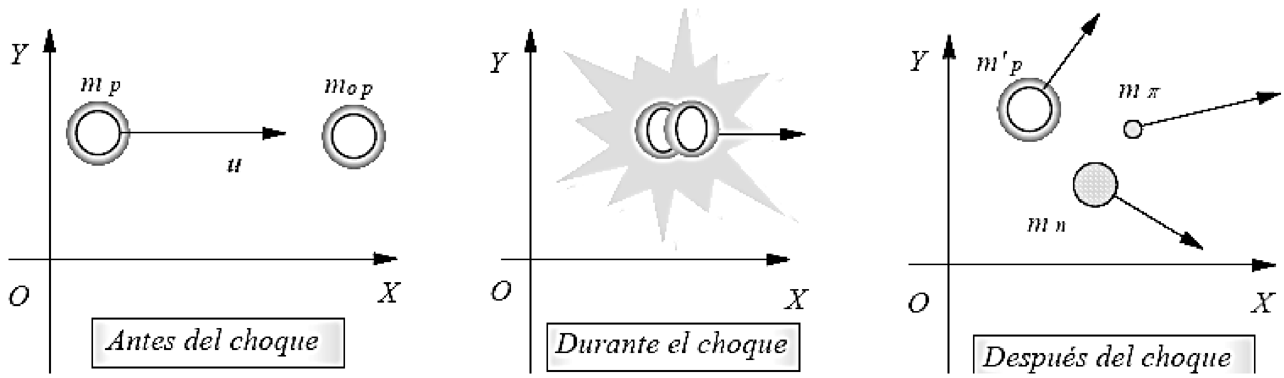
Resolviendo para la velocidad inicial de los protones:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot m_{op}}{2 \cdot m_{op} + m_{o\pi}} \right)^2}$$

Pero la masa de un protón en reposo es aproximadamente igual a 1836 veces la masa en reposo de un electrón m_{oe} , es decir $m_{op} = 1836 \cdot m_{oe}$ y además $m_{o\pi} = 237 \cdot m_{oe}$ por lo tanto. . .

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{2 \cdot (1836) \cdot m_{oe}}{2 \cdot (1836) \cdot m_{oe} + 273 \cdot m_{oe}} \right]^2} = 0.366 \cdot c$$

Usualmente, en el sistema de referencia del laboratorio, se lanza un haz de protones a chocar contra un blanco en reposo, asi que si uno de los protones iniciales está en reposo, entonces el sistema en el que hemos analizado el choque debe moverse respecto al laboratorio con una rapidez v .



Por lo tanto, usando (2.8) , el otro protón que en el sistema O' se movía con la rapidez v, se moverá ahora respecto al laboratorio a la velocidad:

$$u = \frac{u_x{}' + v_x}{\left[1 + \frac{v_x \cdot (u_x{}')}{c^2} \right]} = \frac{v + v}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)} = \frac{2 \cdot (0.366 \cdot c)}{\left[1 + \frac{(0.366 \cdot c)^2}{c^2} \right]} = 0.646 \cdot c$$

Y respecto al laboratorio, si el protón incidente ha de producir un pión, debe tener una energía cinética de

$$K = E - E_o$$

$$= \gamma\cdot(m_{op})\cdot c^2 - (m_{op})\cdot c^2 = (\gamma - 1)\cdot(m_{op}\cdot c^2) = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0.646\cdot c)^2}{c^2}}} - 1\right]\cdot(m_{op}\cdot c^2)$$

$$= [(1.31) - 1]\cdot(m_{op}\cdot c^2)$$

dado que la energía de reposo para un protón es. . .

$$(m_{op})\cdot c^2 = (1.67\times 10^{-27}\cdot kg)\cdot\left(3\times 10^8\cdot\frac{m}{seg}\right)^2 = 1.503\times 10^{-10}\cdot joules = 939\cdot Mev$$

entonces $K = 291$ *Mev* . que es ***más del doble*** de la energía de reposo de un pión ($273\times 0.51\cdot Mev = 139\cdot Mev$), dado que la energía de reposo de un electrón es 0.51 *Mev* .

Algunas consecuencias de la relación masa-energía

Históricamente, el principio de conservación de la energía y el de conservación de la masa en un sistema cerrado, se desarrollaron en forma independiente. La teoría de la relatividad especial nos muestra que esos dos principios sólo son casos especiales de un principio más general: el de *la conservación de la masa-energía* .
En muchos fenómenos físicos, ni la suma de las masas en reposo de las partículas, ni la energía total parecen conservarse por separado. Solo cuando se toma en cuenta la equivalencia relativista entre la masa y la energía, se obtiene nuevamente la conservación de ambas.
Ya mencionamos anteriormente que ésta ley de conservación permite explicar la liberación o absorción de energía en una reacción química o nuclear:

$$\boxed{Reactivos} \longrightarrow \boxed{Productos} + \Delta$$

donde Δ representa la energía absorbida o liberada en la reacción (calor, radicaión, sonido, electricidad etc.) Cuando la masa de los reactivos es mayuor que la de los productos, la reacción es *exoenergética* porque libera una cantidad de energía exactamente igual a la diferencia de masas multiplicada por el cuadrado de la velocidad de la luz . Algo totalmente similar sucede si la reacción requiere energía del exterior par llevarse a cabo, (reacción *endoenergética*). En tal caso, la masa de los productos es mayor que la de los reactivos en una cantidad
exactamente igual a la diferencia de masas multiplicadas por c^2 .
Por ejemplo, en una reacción química como la combustión de hidrocarburos y compuestos orgánicos afines que se "queman" con el Oxigeno (O) del aire y se producen *n* moléculas de bióxido de carbono (CO_2) y *m* moléculas de agua (H_2O) generándose también energía usualmente en forma de calor y luz visible.

$$(Hidrocarburo) + (O_2) \longrightarrow n\cdot(CO_2) + m\cdot(H_2\cdot O) + \Delta$$

La masa de los productos (agua y CO2) será menor que la masa de los reactivos iniciales.
Sin embargo, un químico dirá que la masa "se conserva" en la reacción porque la masa que mide antes y después de que ocurra ésta tiene, según sus instrumentos y balanzas, el mismo valor.

Cuando se acerque a pedirle una explicación razonable a un físico, éste le dirá que debido a la "pequeña" cantidad de energía liberada en la reacción, sus instrumentos de medida son incapaces de detectar la pequeñísima diferencia de masa entre reactivos y productos. Por ejemplo si la combustión de un mol de metano CH_4 libera unos 2 millones de calorias por mol, tal diferencia de masa será de . . .

$$\Delta m = \frac{\Delta}{c^2}$$

$$= \frac{\left(2\times 10^{6}\cdot cal\right)\cdot\left(4.186\cdot\frac{Joules}{cal}\right)}{\left(3\times 10^{8}\cdot\frac{m}{seg}\right)^2} = 9.302\times 10^{-11}\ kg$$

Los cambios de masa asociados a una reacción nuclear son mucho mayores, por ejemplo en la desintegración radiactiva de un mol de Uranio (U^{238}) es unas 50 000 veces mayor que el de la combustión de un mol de gas natural metano CH_4

$$_{92}U^{238} \longrightarrow {}_{90}Th^{234} + {}_{2}He^{4} + \Delta$$

donde un núcleo de Uranio se transforma en uno de Torio emitiendo una partícula alfa (núcleo de Helio) y energía.

Los núcleos de ésa reacción tienen las masas siguientes (expresadas en unidades de masa atómica (*uma*) :

$_{92}U^{238}$: 238.0003 *uma*

$_{90}Th^{234}$: 233.9942 *uma*

$_{2}He^{4}$: 4.0015 *uma*

El cambio de masa: (*masa de productos – masa de reactivos*) para la desintergración de un mol de Uranio $_{92}U^{238}$ se puede expresar por lo tanto en gramos:

$$(233.9942\cdot g + 4.0015\cdot g) - 238.0003\cdot g = -0.0046\cdot g$$

El hecho de que en la reacción se haya perdido masa indica que es exoenergética, como todas las reacciones nucleares espontáneas . El cambio de energía por mol asociado a ésta reacción es:

$$\Delta E = (\Delta m)\cdot\left(c^2\right)$$

$$= \left(4.6\times 10^{-6}\cdot kg\right)\cdot\left(3\times 10^{8}\cdot\frac{m}{seg}\right)^2 = 4.14\times 10^{11}\cdot Joules$$

$$= 9.89\times 10^{10}\cdot cal$$

¡ casi cien mil millones de calorías ! (unas 50 000 veces mayor que la combustión de un mol de metano)

Relación energía-momento

Finalmente, relacionemos la energía total relativista E de una partícula con su momentum lineal p, multiplicando ambos lados de la ecuación para la masa relativista $m = \gamma \cdot m_o$ por c^2 y elevando después al cuadrado . . .

$$(m)\cdot c^2 = (\gamma \cdot m_o)\cdot c^2$$

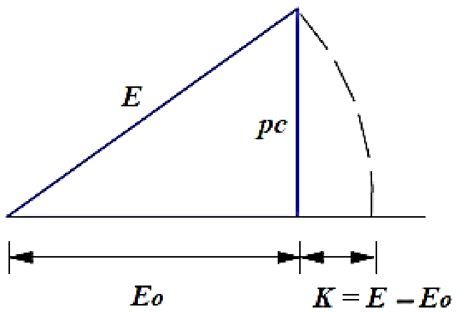
$$(m \cdot c^2)^2 = \gamma^2 \cdot (m_o \cdot c^2)^2 = \frac{(m_o \cdot c^2)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$(m \cdot c^2)^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (m_o \cdot c^2)^2$$

Pero $E = m \cdot c^2$ es la energía total , $E_o = m_o \cdot c^2$ es la energía de masa en reposo y por definición, $m^2 \cdot v^2$ es el cuadrado del momentum lineal p , asi que queda . . .

$$E^2 - p^2 \cdot c^2 = (E_o)^2 \qquad (2.19)$$

Esto significa que la cantidad $(E^2 - p^2 \cdot c^2)$ es una *constante* en cualquier sistema de referencia (puesto que la energía de reposo de un objeto físico no cambia) y se puede interpretar geométricamentede manera muy sencilla en función del teorema de Pitágoras, siendo E la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados E_o y pc



y puesto que $K = E - E_o$ la ecuación anterior también se puede escribir como:

$$(K + E_o)^2 - (p \cdot c)^2 = (E_o)^2$$

de aqui se obtiene . . .

$$p = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{K^2 + 2 \cdot K \cdot E_o} \qquad (2.20)$$

Una expresión que relaciona el momentum lineal de una partícula en función de sus energías cinética y de reposo; pero no sólo eso, sino que además predice que cuando $E_o = 0$ se puede tener una "partícula" con energía y momentum lineal pero sin masa en reposo. . .

$$p = \frac{K}{c} \qquad (2.21)$$

Las partículas de masa en reposo cero realmente existen y siempre se mueven a la velocidad de la luz en el vacío, por ejemplo los *fotónes* o quántums de radiación electromagnética, que son emitidos o absorbidos durante los cambios de estado de energía en un sistema atómico o nuclear.

Se ha comprobado que el intercambio de energía entre materia y radiación ocurre en "paquetes" de tamaño definido (cuantización de la energía), como en la explicación del efecto fotoeléctrico propuesto por Albert Einstein o la radicaión de cavidad de cuerpo negro analizada por primera vez por Max Planck

La cantidad de energía en cada "paquete" está dada por

$$E = h \cdot f$$

donde f representa la frecuencia de la radiación que se emite o se absorbe y h es una constante (constante de Planck) de valor $h = 6.63 \times 10^{-34} \cdot Joule \cdot seg$. Asi que el momentum lineal de un fotón es. . .

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot f}{c}$$

o bién : $p = h \cdot \lambda$ donde $\lambda = \frac{f}{c}$ es la longitud de onda de la radiación.

Bibliografía

- Ferreira, P. (2013). *Fundamentos de la teoría de la Relatividad Especial*. Disponible en https://lc.fie.umich.mx/~pferrei/relativ_es/Relatividad%20Especial.pdf
- Gautreau, R., & Savin, W. (1999). *Física moderna*. McGraw-Hill.
- Serway, R. A., Moses, C. J., & Moyer, C. A. (2005). *Física moderna* (3a ed.). Thomson.