1. Cinemática relativista
2. Interpretación de la dilatación relativista del tiempo y la contracción relativista de longitud

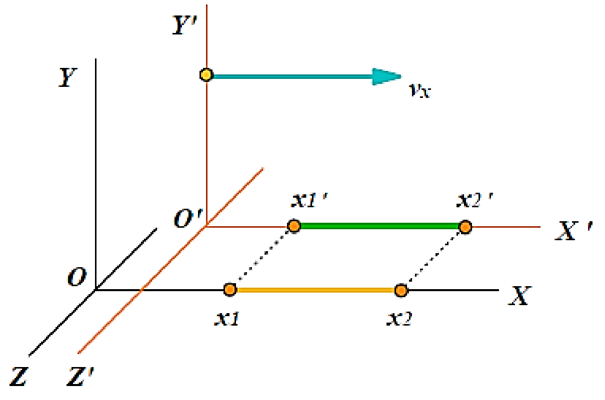
Cinemática Relativista

Contracción de longitud relativista

Recordemos que las longitudes medidas perpendicularmente a la dirección del movimiento relativo NO cambian, ¿qué ocurre con las distancias que se miden en la misma dirección del movimiento relativo?

Para responder ésta pregunta, consideremos dos puntos $(x_1)'$ y $(x_2)'$ separados una distancia $L' = (x_2' - x_1')$ y fijos sobre el eje X' de un sistema inercial O' que se desplaza en la dirección X,X' a la velocidad v_X respecto a nuestro propio sistema inercial O que permanece en reposo, como se indica en la siguiente figura :

Obviamente, el observador O' mide la longitud L' *en reposo* sobre su propio sistema de coordenadas; pero si el observador O de nuestro sistema en reposo desea determinar la distancia entre los puntos $(x_1)'$y $(x_2)'$ debe medir *simultáneamente* su posición, pues ambos puntos se mueven hacia la derecha respecto a él.



Usando las ecuaciones 2.5´, transformaciones de Lorentz,

$$(x_1)' = \gamma\cdot(x_1 - v_X\cdot t_1)$$
$$(x_2)' = \gamma\cdot(x_2 - v_X\cdot t_2)$$

$$L' = (x_2' - x_1')$$
$$= \gamma\cdot(x_2 - v_X\cdot t_2) - \gamma\cdot(x_1 - v_X\cdot t_1)$$

$t_1 = t_2$

O debe medir simultáneamente las posiciones de ambos puntos

$$L' = \gamma\cdot(x_2 - x_1)$$

$L = (x_2 - x_1)$ para el observador O

$$L' = \gamma\cdot L \qquad (2.6)$$

Dado que $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v_X}{c}\right)^2}}$ es una cantidad mayor que la unidad si $v_X \neq 0$, concluimos que $L' > L$.

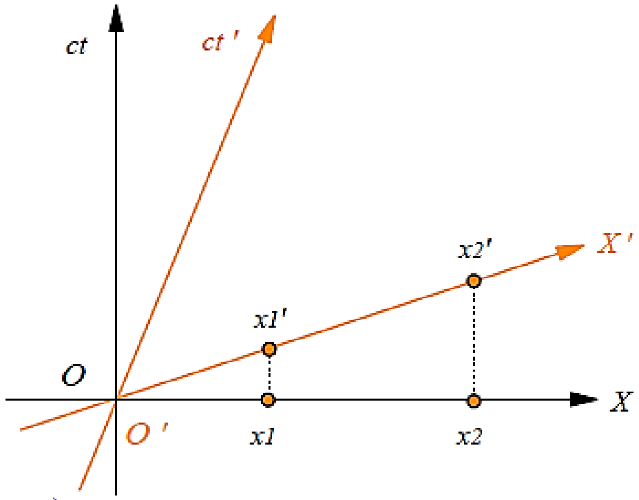
Llegamos asi a un primer asombroso resultado: *las distancias medidas en la dirección del movimiento relativo de un sistema inercial móvil, son más cortas que las longitudes análogas medidas en un sistema inercial en reposo* . Esto significa que los objetos "se encogen" , se acortan, en la dirección de su movimiento.

Pero si la predicción relativista de la contracción de la logitud es correcta, ¿Es un efecto "real" o solamente es una ilusión óptica para el observador que mide la longitud de objetos en movimiento? ¿Cuál es la "verdadera" longitud de un objeto que se mueve?.

La "longitud de un objeto" no es un concepto absoluto sino relativo.

En el sentido pragmático de la ciencia, *algo es "real" en tanto podamos medirlo* (medir alguna de sus propiedades o interacciones con su medio ambiente).

Pero si aún nos resultase difícil aceptar que los objetos se contraen en la dirección de su movimiento relativo, consideremos ahora el diagrama espacio tiempo de los sistemas de referencia O y O' anteriores:



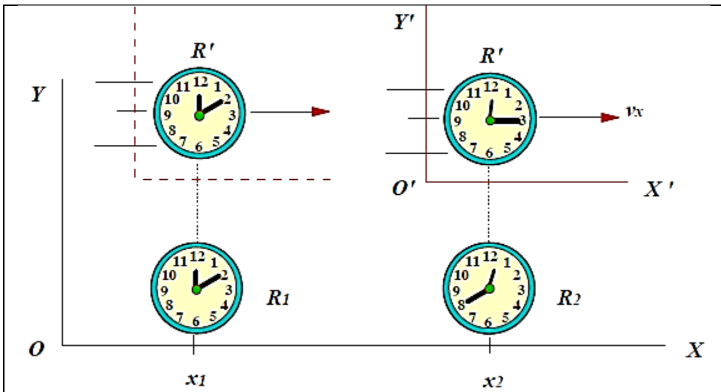
La distancia $L' = (x_2' - x_1')$ es una longitud que mide en reposo y en su propio sistema de referencia el observador móvil O'; pero que para el observador del sistema O, tal longitud está en movimiento. La longitud análoga que mide éste observador es $L = (x_2 - x_1)$. En el diagrama espacio-tiempo de O, claramente la longitud L' es gemétricamente mayor que L, asi que afirmará que debido a su movimiento, la longitud L' se contrae.

Dilatación de tiempo relativista.

Imaginemos ahora un reloj firmemente unido a un punto fijo del sistema inercial del observador O', que mide el intervalo de tiempo $\Delta t' = (t_2' - t_1')$ entre un par de eventos que suceden *en el mismo lugar* de ese sistema, es decir $x_2' = x_1'$.

¿Cuánto tiempo pasa entre ese par de eventos según el observador O del sistema de referencia inmóvil ? . Tomemos en cuenta que esos eventos *no ocurrirán en el mismo lugar* para éste observador (dado que suceden en un punto fijo de O' y todo punto fijo de O' se mueve respecto a O en la dirección X,X').

Según el observador O, esto equivale a comparar la lectura de *un* reloj móvil de O', con la lectura de *dos* relojes fijos separados y sincronizados que se localizan en reposo en las posiciones x_1 y x_2.



Usando las ecuaciones 2.5, las lecturas de los relojes son:

$$t_1 = \gamma \cdot \left[t_1' + \frac{v_x}{c^2} \cdot (x_1') \right]$$

$$t_2 = \gamma \cdot \left[t_2' + \frac{v_x}{c^2} \cdot (x_2') \right]$$

Si usamos entonces las ecuaciones (2.5), las lecturas de esos relojes son . . .

$$t_1 = \gamma \cdot \left[t_1{}' + \frac{v_x}{c^2} \cdot (x_1{}') \right] \qquad \text{y} \qquad t_2 = \gamma \cdot \left[t_2{}' + \frac{v_x}{c^2} \cdot (x_2{}') \right]$$

Asi que el intervalo de tiempo entre esos eventos medido por O es :

$$\Delta t = (t_2 - t_1) = \gamma \cdot \left[t_2{}' + \frac{v_x}{c^2} \cdot (x_2{}') \right] - \gamma \cdot \left[t_1{}' + \frac{v_x}{c^2} \cdot (x_1{}') \right]$$

$$= \gamma \cdot (t_2 \cdot{}' - t_1 \cdot{}') + \gamma \cdot \frac{v_x}{c^2} \cdot (x_2 \cdot{}' - x_1 \cdot{}')$$

pero como $x_2{}' = x_1{}'$, se obtiene

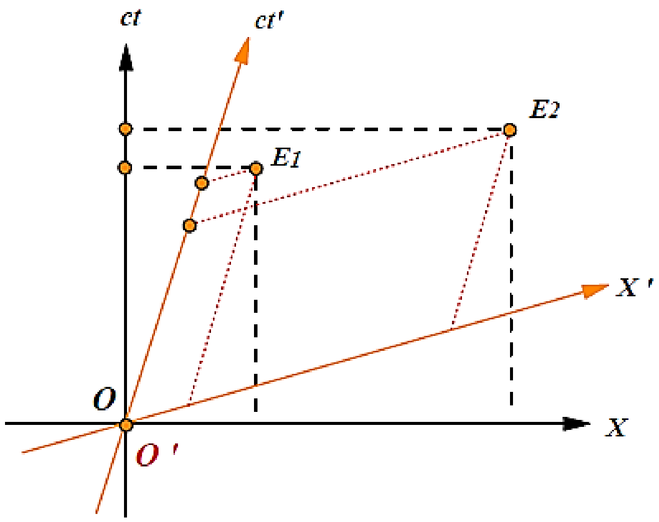
$$\Delta t = \gamma \cdot (t_2 \cdot{}' - t_1 \cdot{}')$$

Pero $\Delta t' = (t_2{}' - t_1{}')$ es precisamente el intervalo de tiempo que mide O' . Asi que . . .

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' \qquad (2.7)$$

y como $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v_x}{c}\right)^2}}$ es una cantidad mayor que la unidad si $v_x \neq 0$, concluimos que $\Delta t > \Delta t'$

Es decir, el observador O dirá que entre el par de eventos pasó en realidad más tiempo (Δt) que el que registra el reloj móvil ($\Delta t'$) del observador O' .
Llegamos asi a otro asombroso resultado: *los intervalos de tiempo medidos por un reloj en movimiento relativo, son mayores que los intervalos análogos medidos por relojes en reposo* .
Esto significa que los relojes que vemos en movimiento relativo "se atrasan" , es decir miden el tiempo más lentamente, en relación a los relojes idénticos que vemos en reposo.
Cualquier observador inmóvil respecto a su reloj afirmará que se atrasan los relojes que se mueven respecto al suyo, y que ese retraso es mayor a medida que aumente la velocidad a la que se mueven Para éste observador en su propio sistema de referencia en reposo, el tiempo "se dilata" en todo sistema de referencia en movimiento.
Esta predicción relativista de la "dilatación del tiempo" , ha derrumbado al tiempo de su pedestal de concepto absoluto. No existe una escala universal de tiempo, la escala de tiempo usada para decir cuando ocurren los eventos es distinta en distintos sistemas de referencia, lo que ocurrió "después" para un observador puede ocurrir "antes" para otro, como se ilustra en el siguiente diagrama espacio-tiempo en el que se representan dos sucesos E_1 y E_2 .



De acuerdo con el diagrama espacio-tiempo del observador en reposo, el evento E1 ocurre antes que el evento E2, pero según el diagrama espacio-tiempo del observador móvil, el evento E2 ocurre antes que el evento E1.

Sin embargo, es evidente que semejante relatividad de los conceptos "antes" y "después" debe tener sus límites. Así, por ejemplo, es imposible admitir desde el punto de vista de cualquier observador que un niño nazca antes que su madre. La dilatación relativista del tiempo no puede invertir el orden de la relación causa-efecto.

Para un observador O determinado, dos eventos tendrán una relación causa-efecto cuando en su espacio-tiempo puedan conectarse por medio de una señal de interacción transmitida de uno a otro. Dado que la luz en el vacío es la señal que más rápidamente se propaga en la Naturaleza, todos los puntos evento del espacio tiempo de éste observador que queden dentro de su "cono de luz" (*un pulso luminoso que se propaga desde O como centro*) podrán representar posibles eventos causa o eventos efecto

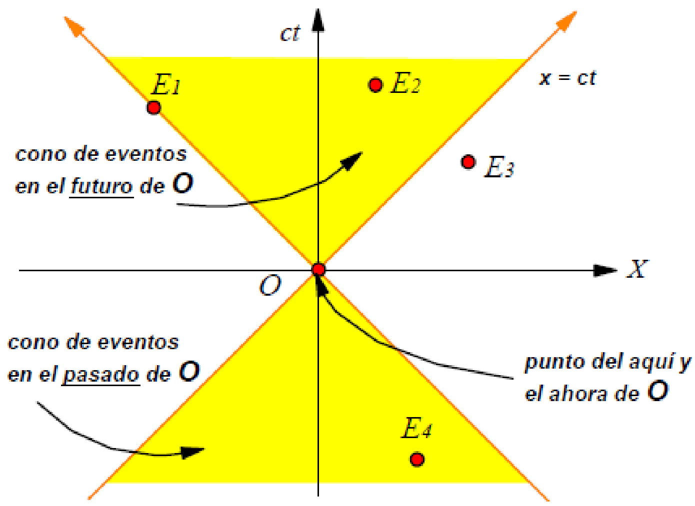
Asi por ejemplo, el evento E_3 no puede ser relacionado causalmente con el observador O porque para él , queda fuera de "su cono de luz" ya que una línea recta de la forma $x = vt$ que una a O con E_3 tendría una pendiente que implica que $v > c$ lo cual significaría que la señal transmitida entre estos puntos se propaga más rápidamente que la luz, lo cual es imposible.

$$x = v \cdot t$$

$$\left(\frac{c}{v}\right) \cdot x = c \cdot t$$

y

$$\frac{c}{v} < 1 \qquad \text{implica que } c < v$$



Similarmente el evento E_1 queda en el límite del cono y la única señal que puede conectar a ese evento con O es una señal luminosa.

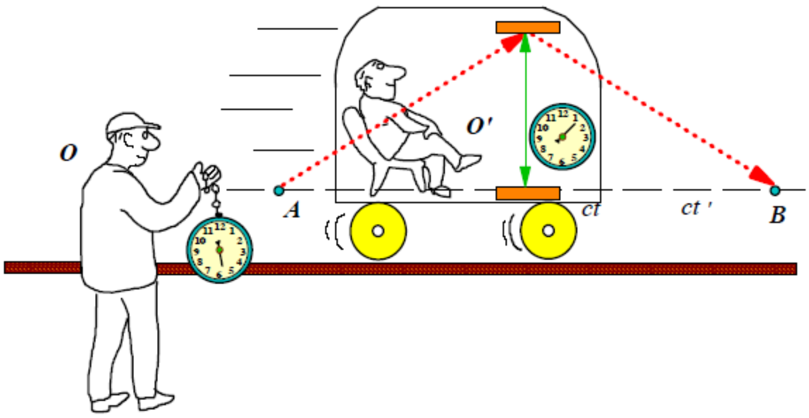
Como O nunca podrá superar la velocidad de la luz, todos los sucesos que ya han ocurrido en su sistema de referencia están en su cono del pasado, como por ejemplo el evento E_4 (parte negativa del eje ct) y cualquiera de esos puntos pudo ser causa de lo que es O aqui y ahora . Similarmente, O puede ser causa de cualquiera de los eventos o sucesos que queden dentro de su cono de futuro (efectos).

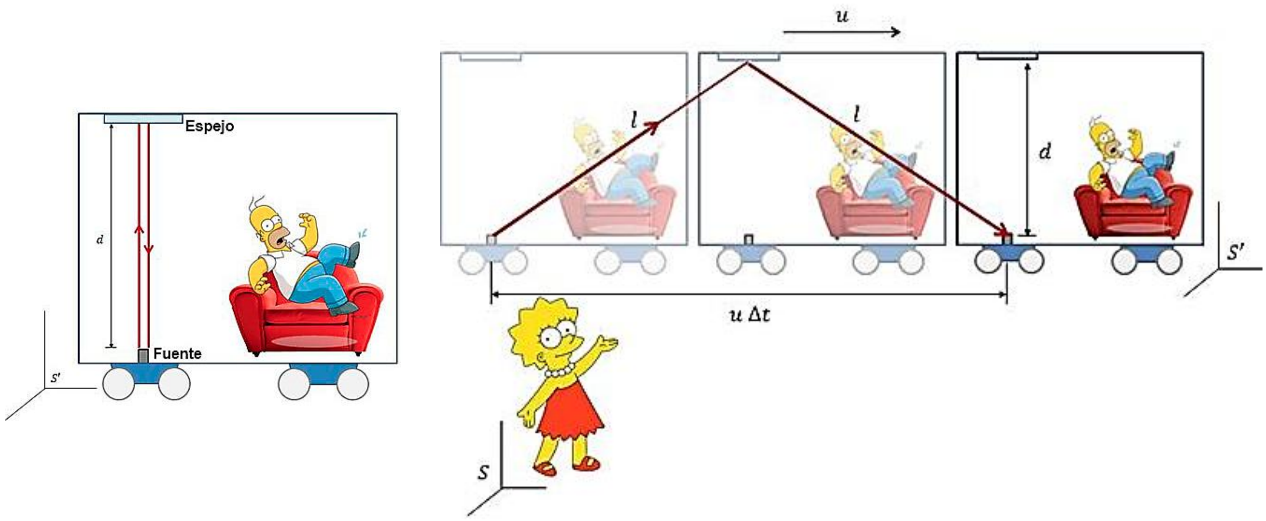
Aunque los eventos E_1 y E_2 existen y ocurrirán en el futuro del observador O , él no podrá decir que uno es causa del otro porque la línea recta que los une tendría una pendiente que implica que $v > c$.

Estas relaciones causa-efecto son independientes del sistema de referencia puesto que el cono de luz es el mismo para todos los observadores inerciales. Es decir, debido a dilatación relativista del tiempo, puede cambiar el intervalo temporal entre dos eventos al ser observados desde diferentes sistemas de referencia, Además, el "antes y el después" como vimos son conceptos relativos; pero si dos eventos están relacionados causalmente, ésta relación no cambia de un sistema de referencia a otro, el orden en que ocurren tales eventos no puede ser alterado.

Interpretaciones físicas

Dilatación relativista del tiempo.
El funcionamiento de cualquier reloj está determinado por leyes mecánicas o electromagnéticas, las que como hemos visto, no cambian de forma en distintos sistemas inerciales. Entonces el efecto de la "dilatación del tiempo no depende del tipo de reloj usado para medir el tiempo y tampoco significa que un reloj en movimiento relativo altere su mecanismo de tal manera que se retrase cuando se esté desplazando respecto a los demás. Visto desde su propio sistema de referencia el reloj funcionará exactamente igual que cuando está en reposo.
Consideremos por ejemplo un vagón de un tren que se mueve a la rapidez constante v respecto al suelo. Dentro del vagón, un observador O' mide el tiempo con un "reloj" que consiste en dos espejos paralelos separados una distancia vertical L, en los cuales está "rebotando" continuamente un rayo de luz al reflejarse entre un espejo y otro.





Para el observador O´, dentro del vagón, el tiempo que tarda la luz en ir y volver a un espejo es:

$$\Delta t' = \frac{2 \cdot L}{c}$$

porque la salida y la llegada del puslo de luz ocurre en un mismo lugar, los espejos están en reposo y la rapidez de la luz es c .

¿Pero cuanto tiempo tarda la esa luz en ir y volver a un espejo para un observador O en reposo en la estación del tren?. Es claro que los eventos salida y llegada de la luz al espejo ocurren en lugares separados (A y B) para éste observador, dado que él ve al espejo en movimiento y por lo tanto la luz recorre una trayectoria más larga que la distancia vertical L .
Por otra parte, sabemos que la velocidad de la luz es absoluta, tiene el mismo valor tanto para el pasajero que viaja en el tren como para el observador en la estación, asi que la conclusión que obtenemos es inevitable. . . entre la salida y la llegada de la luz a un espejo, *¡en la estación transcurrió más tiempo que en el tren* ! porque la luz recorrió más distancia respecto a O que respecto a O'.

Para O , la mitad del recorrido de la luz es la hipotenusa de un triángulo recto de lados L y $v\cdot\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$,

porque se recorre en la mitad del tiempo ($\Delta t/2$) . Asi que el recorrido completo vale :

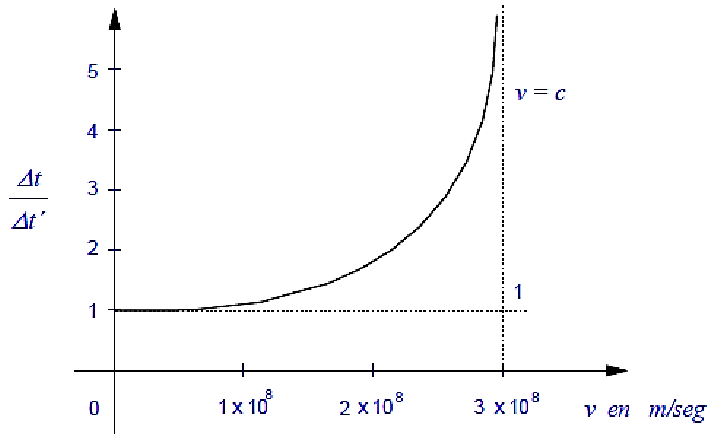
$$2\cdot\sqrt{L^2+\left(v\cdot\frac{\Delta t}{2}\right)^2}$$

El tiempo que necesita la luz para recorrer esa distancia a velocidad constante es :

$$\Delta t = \frac{2\cdot\sqrt{L^2+\left(v\cdot\frac{\Delta t}{2}\right)^2}}{c}$$

$$\Delta t = \frac{2\cdot L}{\sqrt{v^2-c^2}} = \frac{2\cdot\frac{L}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

que es precisamente la expresión (2.7) para la dilatación relativista del tiempo. No es difícil darse cuenta de que el retraso del reloj de O' según O será más notable mientras mayor sea la rapidez relativa v , porque será mayor el cateto $v\cdot\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ y mayor la distancia recorrida por la luz . De manera que en el límite cuando la velocidad v de translación de un reloj se aproxima a la velocidad c , parecerá que que tal reloj marcha cada vez más lentamente hasta detenerse y dejar de medir el tiempo.



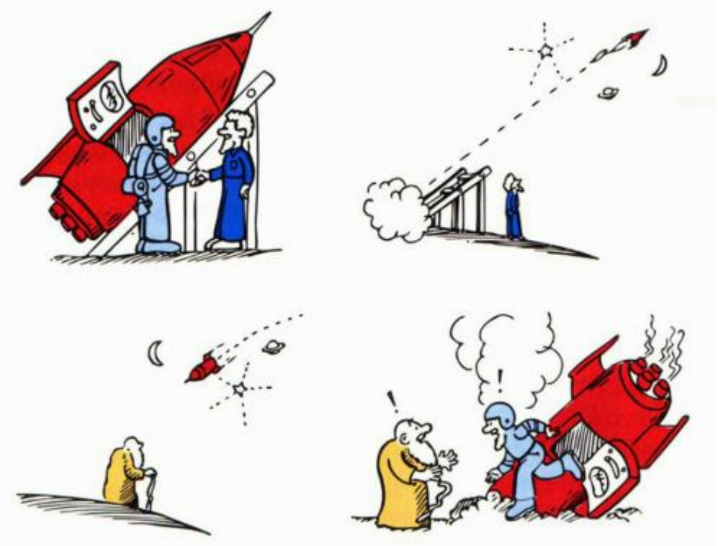
¿Acaso no significa éste resultado que los relojes que se adelantan respecto a los demás son los que se encuentran en reposo absoluto, contradiciendo asi el principio de la relatividad del movimiento ? . No, porque el reloj del tren ¡se comparó con dos relojes diferentes en reposo! sincronizados y localizados en los puntos A y B de la estación. Además, si el reloj de espejos paralelos estuviera ahora en reposo en la estación, sería el observador del tren quién afirmaría que el reloj de O se retrasa debido a que para él, la estación está en movimiento y el tren en reposo.
¿Quién de los dos tiene razón?. Ambos, los efectos relativistas son recíprocos y se originan por el movimiento relativo entre los sistemas de referencia inerciales y el irrebatible resultado experimental de que la rapidez de la luz es la misma en todos ellos.
Esta simetría entre los sistemas inerciales ha originado algunas paradojas, como la siguiente conocida como la "*paradoja de los gemelos*" : Imaginemos que una persona A se despide de su hermano B en una estación espacial porque hará un viaje de circunvalación en un cohete hacia una estrella lejana y luego de cierto tiempo regresará a la estación de partida.
Aumentando la velocidad del cohete se puede llegar a una situación tal que, mientras que para el pasajero transcurrió solamente un dia, para las personas en la estación pasaron muchos años.

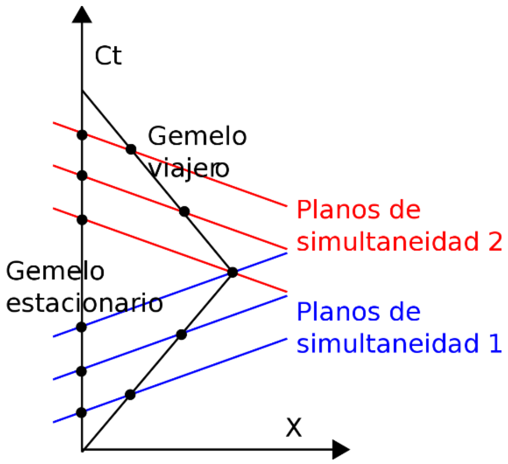
Asi que transcurridas solamente 24 horas (¡ medidas por su reloj !) , al regresar a casa en la estación de la que inició su viaje, nuestro pasajero se enterará de que muchos de sus parientes y conocidos murieron hace mucho tiempo.

Pero, ¿acaso no es cierto que desde el punto de vista del pasajero, el cohete está en reposo y la estación de salida se mueve en una trayectoria de circunvalación idéntica ?. Por supuesto que si y por lo tanto, el pasajero A podrá llegar a una conclusión contraria a la de su hermano B : Dirá que para las personas de la estación ¡ transcurrió solamente un dia y para los pasajeros del cohete pasaron muchos años ! .
¿ Cuál de los dos hermanos tiene razón ?

A diferencia del ejemplo anterior, en el cual se compara la lectura del reloj del pasajero con las lecturas de dos relojes diferentes en reposo, en el viaje de circunvalación no se comparan tres relojes sino solamente dos: el reloj del cohete y el de la estación de salida. Además, en este caso la situación no es completamente simétrica debido a que el cohete *no es un sistema inercial.* porque :

1° Debe acelerar inicialmente para alcanzar su velocidad de viaje y luego debe frenar para quedar en reposo al regresar a la estación.
2° Además, tiene una aceleración (debida a una fuerza) en el movimiento circular. (Tanto los pasajeros del cohete como las personas de la estación, estarán de acuerdo en que cualquier objeto libre dentro del cohete *no se moverá en línea recta a velocidad constante*).





Es como si *la aceleración fuese la causa que genera todos los efectos relativistas*, entre ellos la dilatación del tiempo.

Por lo tanto, marcará más tiempo aquél reloj sobre el que no actúa alguna fuerza. Asi que al final del viaje, A sería más joven que su hermano B .
Sin embargo desde el punto de vista de A, todos sus procesos vitales continuarán en su ritmo normal, y envejecerá de acuerdo con su propio tiempo con la misma rapidez como si estuviese en reposo junto a su hermano B.
Asi que se podría hacer el viaje de ida y vuelta a una estrella por lejana que estuviese, en muy poco tiempo (¡ en minutos o segundos !) aumentando la velocidad del cohete y aproximándola a la velocidad de la luz.
Este ejemplo ilustra la posibilidad de crear una "máquina del tiempo" , por ejemplo, si somos pasajeros de un tren en un viaje redondo a una velocidad cercana a la de la luz , al llegar a la estación de la que partimos apenas el dia anterior, ¡ descubriremos que nos encontraremos en el futuro, tanto más, cuanto más rápidamente se haya movido el tren !; sin embargo, no habrá posibilidad de revertir el efecto, es decir ¡ no podremos viajar hacia el pasado tomando el tren de regreso !
Claro que a las personas de la estación les parecería como si el tiempo se hubiese "detenido" para los pasajeros del tren, pero no podrán decir que viajaron en el tren hacia el pasado. Viajar hacia el pasado implica contradicciones tan absurdas como la de un hombre que visita a sus abuelos sin que hayan nacido todavía sus padres.

Contracción relativista de la longitud .
Aunque ya hemos dicho que la localización de un cuerpo en el espacio es un concepto relativo, en la Física Clásica se atribuye un caracter absoluto a las dimensiones de los cuerpos, es decir se dá por hecho que éstas son una propiedad de los cuerpos y no dependen del sistema de referencia desde el que se efectúe su medición. Sin embargo, esta suposición que contradice los resultados relativistas y es simplemente un prejuicio que se surge como resultado de que casi siempre vemos objetos que se mueven a una velocidad muy baja comparada con la rapidez de la luz en el vacío.

Consideremos por ejemplo un tren que se mueve en línea recta a la rapidez constante v respecto al andén de una estación. Se desea medir la longitud del andén, desde dentro del vagón por un observador O' que viaja en él (y para quién el tren está en resposo) y desde fuera del tren por un observador O en reposo en el andén.

Cuando el tren está en reposo en el andén de la estación, ambos observadores estarán de acuerdo en que la longitud del andén L es la misma para ambos; pero cuando el tren está en movimiento, el tiempo que tarda en recorrer el andén desde un extremo al otro, será diferente de acuerdo a los relojes de ambos observadores, porque como ya sabemos , los relojes en movimiento se retrasan.
Naturalmente, para el observador O que está en reposo en la estación, el frente del tren recorre el andén en el tiempo:

$$t = \frac{L}{v}$$

y mide ese tiempo con dos relojes sincronizados situados en los extremos del andén.
En cambio, para el pasajero O', los extremos del andén pasan frente a él en el tiempo :

$$t' = \frac{L'}{v}$$

Donde L' es la longitud del andén (qué el vé en movimiento). Además, el movimiento del andén desde un extremo hasta el otro dura menos tiempo , dado que los relojes del observador O a él le parecen relojes en movimiento, asi que $t = \gamma \cdot t'$, y por lo tanto, substituyendo las expresiones de t y t' queda :

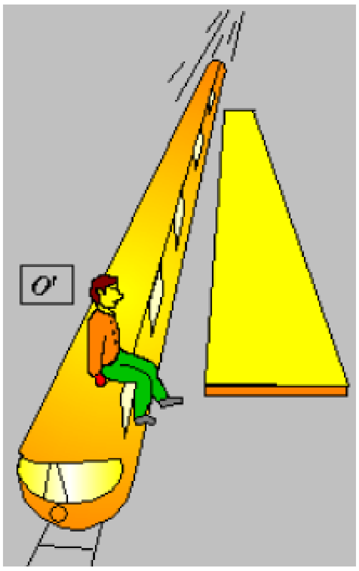
$$\frac{L}{v} = \gamma \cdot \frac{L'}{v}$$

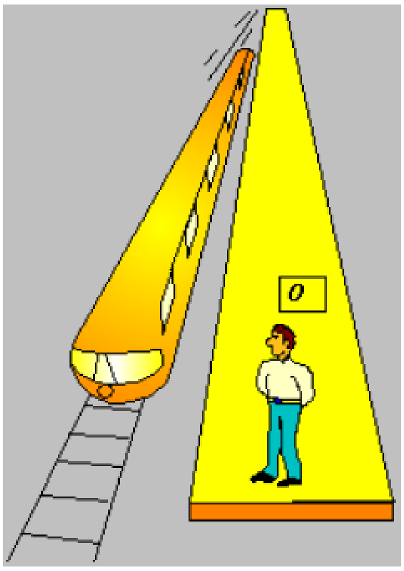
Esto es :

$$L = \gamma \cdot L'$$

Asi que para éste observador la longitud inicial (L) del andén *se reduce* (dado que $\gamma > 1$) a la longitud L' cuando la ve en movimiento y llegará a la conclusión de que cualquier cuerpo acorta su longitud en la dirección de su movimiento.
Sin embargo esa reducción de longitud de ninguna manera será un indicador del movimiento absoluto: es suficiente ubicarse en el sistema que esté en reposo respecto al cuerpo y éste de nuevo se alargará recobrando su longitud original.

Supongamos ahora que quisieramos medir la longitud el tren, sabiendo que cuando está en reposo en la estación mide lo mismo que el andén.
Es obvio que ahora el pasajero O' medirá esa longitud en reposo en su sistema de referencia (el tren) usando dos relojes separados en el primero y último vagones,Sin embargo el observador O en reposo en la estación del tren ve tal longitud en movimiento y determinará que los extremos del tren cruan frente a él en un tiempo menor, asi que concluirá que el tren en movimiento se acortó respecto a su longitud en reposo.





De este manera los pasajeros del tren determinarán que el andén ha reducido su longitud y a los observadores que se encuentren en éste les parecerá que se redujo la longitud el tren, como se ilustra en los dos dibujos de arriba. ¿Cuál de éstos dos dibujos representa la realidad ? . Ambos porque representan la misma realidad objetiva pero analizada desde distintos sistemas de referencia.

¿Existe aquí una paradoja similar a la de los gemelos ? ,es decir, al final de un viaje de circunvalación ¿serán los metros de los pasajeros que hicieron el viaje, más cortos que los metros de los observadores en reposo ?
Aunque ciertamente en un viaje de circunvalación habrá un cambio de la longitud en la dirección del movimiento, también habrá un cambio continuo de dirección de manera que el movimiento en una dirección particular tiene una duración instantánea.

De ahora en adelante, las longitudes y tiempos medidos en reposo en un sistema de referencia los denotaremos como "longitud propia" L_0 y como tiempo "propio" t_0, mientras que L y t representarán las cantidades correspondientes medidas en movimiento. De manera que las fórmulas relativistas 2.6 y 2.7 quedan:

$$L_o = \gamma \cdot L \qquad \text{y} \qquad t = \gamma \cdot t_o$$

$$(L_o > L) \qquad \qquad (t > t_o)$$

Bibliografía

- Diagrama de Minkowski. (2024, 8 de abril). Wikipedia, La enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Minkowski
- Ferreira, P. (2013). *Fundamentos de la teoría de la Relatividad Especial*. Disponible en https://lc.fie.umich.mx/~pferrei/relativ_es/Relatividad%20Especial.pdf
- Gautreau, R., & Savin, W. (1999). *Física moderna*. McGraw-Hill.
- Serway, R. A., Moses, C. J., & Moyer, C. A. (2005). *Física moderna* (3a ed.). Thomson.

Recomendaciones:

Copiar y analizar los ejercicios resueltos del capítulo 1 del libro de Física Moderna de Serway y de los capítulos 1 a 6 del texto de Física Moderna de Gautreau.

Siguientes temas:

1. Transformación relativista de velocidades
2. Aberración estelar
3. Efecto Doppler