1. Postulados de la TER y simultaneidad de eventos
2. Diagramas espacio-tiempo
3. Transformación relativista de coordenadas espacio-tiempo

Postulados de la Teoría especial de la Relatividad.

I. *Todas las leyes de la Naturaleza conservan su forma matemática en todo sistema de referencia inercial.*

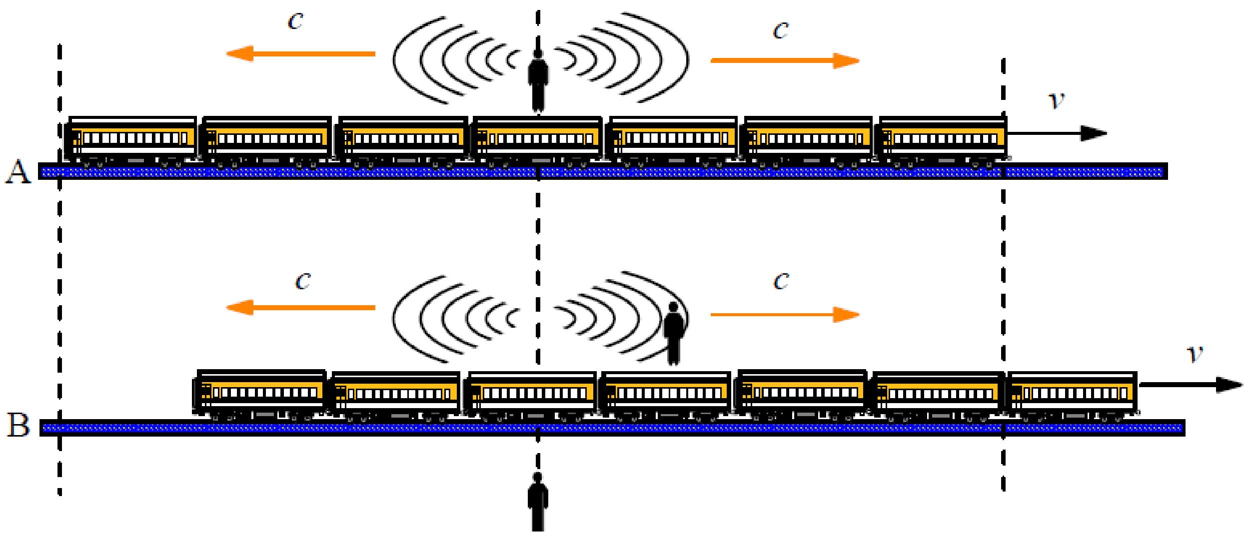
II. *La velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas (luz) en el vacío tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales y además es independiente del movimiento de la fuente o del observador*

Simultaneidad de eventos

La simultaneidad de eventos que ocurren en un mismo lugar queda fuera de duda . Pero ¿como podemos asegurar que dos eventos que ocurren en lugares diferentes, muy distantes uno del otro son simultáneos ?

En la Física Clásica hacemos la suposición implícita ("de sentido común") de que dos relojes muy separados, se pueden sincronizar enviando de uno a otro una señal a una velocidad infinita, el reloj que emite la señal empieza a funcionar al mismo tiempo que recibe la señal el otro reloj, dado que la distancia que los separa es recorrida por la señal instantáneamente.

¡Excelente procedimiento! , solo que en el universo ***nada*** se mueve a una velocidad infinita. Cualquier señal que enviemos de un reloj a otro necesita cierto tiempo para recorrer la distancia que los separe. Podemos pensar también que éste problema se resuelve si sincronizamos los relojes cuando están muy cerca y luego simplemente los alejamos; pero ¿acaso no es otra suposición de nuestro sentido común (que ya nos ha engañado varias veces) el suponer que el movimiento de translación de un reloj no altera su medida del tiempo ?. En efecto, no tenemos garatía alguna de que tal cosa suceda.



Imaginemos por ejemplo un tren de longitud $L = 4\,200\,000$ *km* que marcha a la rapidez $v = 225\,000$ *km/seg* rectilínea y uniformemente. Supongamos también que en el primero y el último vagones hay instaladas unas puertas automáticas que se abren en el instante en que incide sobre ellas una señal luminosa.

Si se enciende una fuente de luz justamente en la mitad del tren, ¿ se abrirán al mismo tiempo las puertas tanto para la gente que viaja enmedio del tren como para la gente que está sobre el andén ?
Para la gente que vá sentada en los asientos de enmedio del tren la luz se propaga respecto al tren a la velocidad $c = 300000$ *km/seg* , en todas las direcciones, asi que transcurrido un tiempo

$$t = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{c} = \frac{2100000 \cdot km}{\left(300000 \cdot \frac{km}{seg}\right)} = 7 \cdot seg$$

la señal de la luz llegará simultáneamente al primero y último vagones y las puertas se abrirán al mismo tiempo.

¿Qué es lo que verán los observadores en el andén? (figura B) . Para ellos, de acuerdo al experimento de Michelson, la luz se encendió en el mismo punto y también se propaga a la velocidad c en todas las direcciones, pero el último vagón avanza al encuentro de la luz, por eso el rayo de luz incide sobre la puerta del último vagón dentro de un tiempo de * . . .

$$t_1 = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{c+v} = \frac{2100000 \cdot km}{\left(300000 \cdot \frac{km}{seg}\right) + \left(225000 \cdot \frac{km}{seg}\right)} = 4 \cdot seg$$

En la otra dirección, la luz debe alcanzar al primer vagón y por lo tanto, incidirá sobre éste transcurridos

$$t_2 = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{c-v} = \frac{2100000 \cdot km}{\left(300000 \cdot \frac{km}{seg}\right) - \left(225000 \cdot \frac{km}{seg}\right)} = 28 \cdot seg$$

Entonces, para las personas del andén las puertas del tren no se abrirtán al mismo tiempo. primero se abrirá la puerta de atrás y transcurridos $28 - 4 = 24$ segundos , se abrirá la puerta de adelante.
De ésta manera, dos acontecimientos completamente similares que son simultáneos en un sistema de referencia (el tren), no lo son en otro (el andén).
Esto nos lleva a concluir que si en un sistema de referencia tenemos sincronizados un conjunto de relojes que nos dan la lectura de tiempo en cada lugar de ese sistema, entonces para un observador de otro sistema de referencia tales relojes no parecen sincronizados . A su vez , los relojes sincronizados de ese observador no parecerán sincronizados para nosotros.
La simultaneidad de eventos es un concepto relativo que solamente tiene sentido si se indica el sistema de referencia inercial en el cual tales eventos ocurren al mismo tiempo.

En consecuencia, por lo dicho anteriormente concluimos que *las escalas de tiempo son diferentes en distintos sistemas de referencia* .

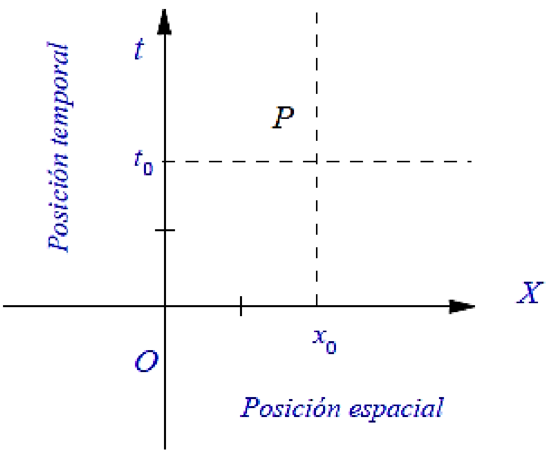
Diagramas espacio-tiempo

Para sincronizar dos relojes de un sistema de referencia dado y construir por lo tanto en este sistema una escala temporal, debemos seguir entonces alguno de los siguientes procedimientos:

1° Adelantar el reloj al que llega la señal que emite el primero en un tiempo igual al requerido por la señal para recorrer la distancia que separa a ambos relojes.

2° Enviar una señal desde el punto medio de la distancia entre ambos relojes. Esta señal llegará al mismo tiempo a los dos relojes puesto que recorrerá la misma distancia y los pondrá a funcionar simultáneamente.

Como señal de sincronización se elige la luz, no solamente porque se propaga con la máxima rapidez conocida en el universo, sino también porque esa rapidez es la misma en todos los sistemas de referencia. Representemos ahora el 2° procedimiento de sincronización en un sistema de coordenadas de dos dimensiones (por sencillez), en el que uno de los ejes representa el tiempo y el otro el espacio.

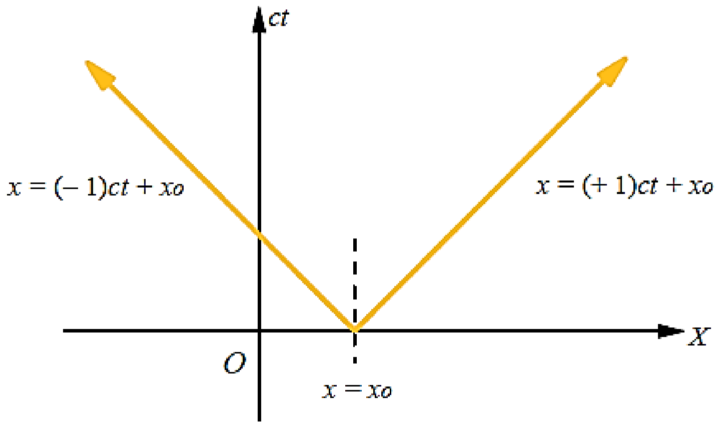


Cada punto sobre el eje X respesenta una longitud o distancia respecto al origen (posicion cero) y cada punto sobre el eje t representa el tiempo transcurrido desde el origen (instante cero).
Cualquier punto $P(x_0 , t_0)$ sobre éste plano representa entonces un evento que ocurre en un lugar (x_0) al tiempo (t_0) .

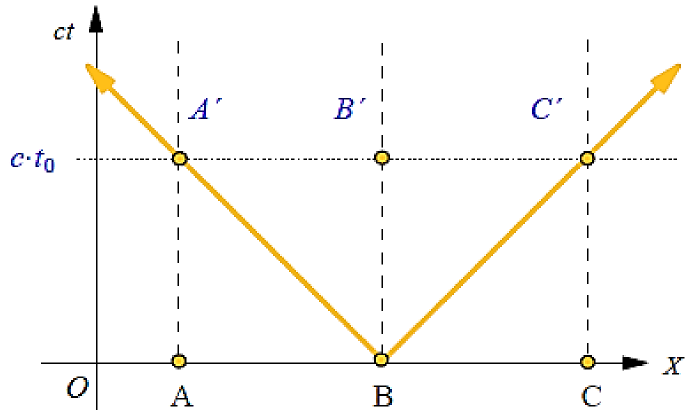
En particular, todos los puntos sobre cualquier recta horizontal $t = t_0$ (como el eje X por ejemplo) , representan eventos simultáneos puesto que para todos ellos la coordenada t vale lo mismo lo que significa que ocurren al mismo tiempo.

Asi mismo, todos los puntos sobre cualquier recta vertical $x = x_0$ (como el eje t por ejemplo) , representan la posición de un objeto inmóvil , puesto que para todos ellos la coordenada x vale lo mismo lo que significa que no cambia su posición a lo largo del tiempo.

Cualquier pulso de luz que se emita en el punto x_0 quedará entonces representado por una línea recta de la forma: $x = c \cdot t + x_0$ si se mueve hacia la derecha del eje X, y por la recta $x = -c \cdot t + x_0$ si se mueve hacia la izquierda del eje X, puesto que éstas ecuaciones definen la posición x del pulso de luz en función del tiempo t.
Si cambiamos ligeramente la escala vertical por ct, las ecuaciones anteriores, representan rectas de pendientes $+1$ y -1 respectivamente.



Consideremos ahora en nuestro diagrama espacio-tiempo tres puntos A, B y C fijos y equidistantes sobre el eje X y supongamos que en el momento $t = 0$ se emiten desde el punto medio B dos pulsos de luz, uno hacia A y otro hacia C.



Como A, B y C son puntos inmóviles, al transcurrir el tiempo describen una trayectoria vertical en el espacio-tiempo . Las intersecciones A' y C' de esas rectas con las rectas que representan la propagación de los pulsos de luz indican la llegada de la luz a los puntos A' y C' al tiempo t_0.
Como ya se había dicho, éste es uno de los procedimientos de sincronización de relojes y geométricamente es fácil ver que los puntos A' y C' están sobre una misma recta horizontal y por lo tanto representan eventos simultáneos, es decir la luz llega en el mismo instante a los puntos A' y C'.
Analíticamente, si las posiciones de A, B y C son $(x_0 - x_1)$, x_0 y $(x_0 + x_1)$ respectivamente, y el pulso de luz se emite desde x_0, entonces el tiempo de llegada de la luz a los puntos A' y C' se encuentra resolviendo simultáneamente para t las ecuaciones que dan la posición de esos puntos y el pulso de luz.

$x = x_0 - x_1$ (*para el punto A*)

$x = -c \cdot t + x_0$ (*para el pulso a la izquierda*)

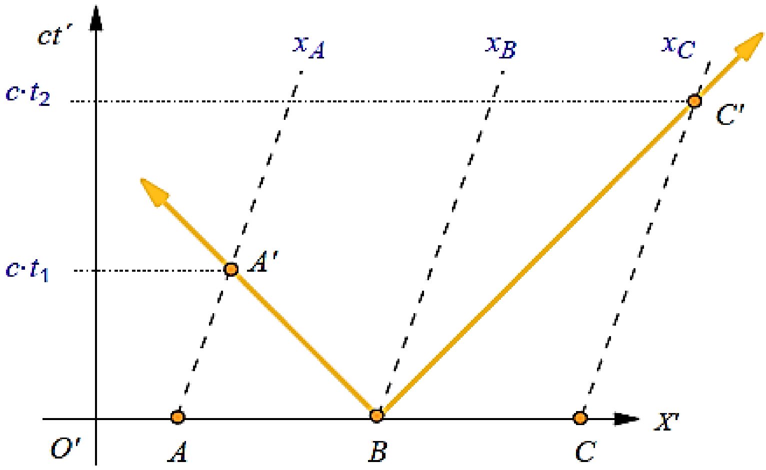
$x = x_0 + x_1$ $\quad$ (*para el punto C*)

$x = c \cdot t + x_0$ $\quad$ (*para el pulso a la derecha*)

se obtiene *el mismo* resultado: $t = \left(\frac{x_1}{c}\right)$

Entonces, los eventos A´ y C´ son SIMULTÁNEOS.

Como ya mencionamos, estos eventos no son simultáneos para otro observador que se mueva por ejemplo hacia la izquierda de O con rapidez v. Para tal observador, los puntos A, B y C no están fijos sino que se desplazan hacia la derecha con la misma rapidez v, de modo que en su propio diagrama espacio-tiempo, esos puntos quedan representados por las rectas : $x_A = (x_0 - x_1) + v \cdot t$; $x_B = x_0 + v \cdot t$ y $x_C = (x_0 + x_1) + v \cdot t$ respectivamente .



La propagación de los pulsos luminosos que salen de B se representa aquí igual que en el diagrama de O porque de acuerdo al resultado de Michelson, la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales. Sin embargo, es evidente que las intersecciones de esas rectas con las que representan la posición de los puntos A y C ocurren aqui en tiempos muy diferentes porque no quedan sobre la misma recta horizontal.

Si las posiciones de A, B y C son $(x_0 - x_1)$, x_0 y $(x_0 + x_1)$ respectivamente, y el pulso de luz se emite desde x_0 , el tiempo de llegada de la luz a los puntos A' y C' se encuentra resolviendo simultáneamente para t' las ecuaciones que dan la posición de esos puntos y el pulso de luz.

$x' = (x_0 - x_1) + v \cdot t$ $\quad$ (*para el punto A*)

$x' = -c \cdot t' + x_0$ $\quad$ (*para el pulso a la izquierda*)

$x' = (x_0 + x_1) + v \cdot t$ $\quad$ (*para el punto C*)

$x' = c \cdot t' + x_0$ $\quad$ (*para el pulso hacia la derecha*)

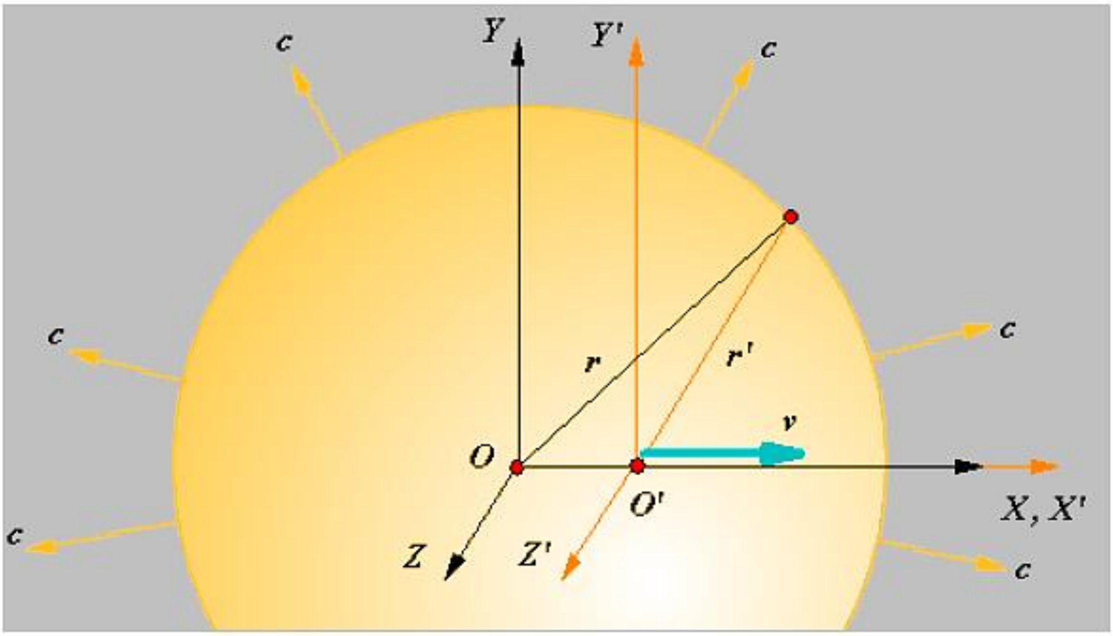
$t_1 = \left(\frac{x_1}{c + v}\right)$ y $t_2 = \left(\frac{x_1}{c - v}\right)$

En este sistema de referencia móvil, con velocidad v, los eventos A´y C´ NO SON SIMULTÁNEOS.

Transformación relativista de coordenadas espacio-tiempo

Ahora que sabemos que tanto el lugar *donde* ocurre un evento como el intante *cuando* ocurre dependen del sistema de referencia desde el cual se observa tal evento, es decir que los conceptos de tiempo y espacio son relativos, se nos presenta el siguiente problema: Dados dos sistemas de referencia inerciales O y O' en movimiento relativo, *¿Cuales son los valores de espacio y tiempo (x' , y' , z' , t') para un evento respecto a O' si ya conocemos las magnitudes de espacio y tiempo (x , y , z , t) del mismo evento respeto a O ?*
Ya conocemos que la respuesta que dá la Mecánica Clásica a éste problema es la Transformación de coordenadas de Galileo (ecuación 1-1) ; pero también sabemos que tal respuesta no es congruente con el resultado experimental de la constancia de la velocidad de la luz, asi que la relación que buscamos entre las coordenadas de los sistemas O y O' debe tener en cuenta ese hecho fundamental.

Consideremos por sencillez, dos sistemas de referencia O y O' con ejes de coordenadas paralelos entre si, moviéndose el sistema O' a la velocidad constante v_x en la dirección X respecto al sistema O.
Supongamos que en el instante $t = t' = 0$ ambos sistemas coinciden uno sobre otro y que en ese momento se emite un pulso de luz que se propaga en todas direcciones formando un frente de onda esférico.



De acuerdo con las mediciones hechas desde el sistema O , la distancia r que recorre tal onda esférica en un tiempo t es $r = ct$ porque el origen O es el centro desde el que se propaga tal onda de luz a la velocidad c .

$$r = c \cdot t$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c \cdot t$$

o elevando al cuadrado y simplificando queda . . .

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 = 0 \qquad (2.2)$$

Pero para el observador del sistema O', sucede exactamente lo mismo, es decir, de acuerdo con sus mediciones la distancia r' que recorre tal onda esférica en un tiempo t' es $r' = ct'$ porque el origen O' es el centro desde el que se emitió tal onda de luz *a la misma velocidad* c (de acuerdo al resultado de Michelson-Morley) es decir, el observador O' llegará exactamente a una ecuación similar a la obtenida por el observador O :

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2 \cdot (t')^2 = 0 \qquad (2.2')$$

Comparando las ecuaciones (2.2) y (2.2') y recordando que solamente existe movimiento relativo a lo largo de la dirección X-X' , propongamos que las coordenadas que no tienen movimiento relativo no cambian , es decir $y = y'$, $z = z'$.
Además, dado que la Transformación de coordenadas de Galileo ha probado su validez a velocidades muy bajas ($v_X << c$) comparadas con la velocidad de la luz en el vacío, propongamos que . . .

$$x = \gamma \cdot (x' + v_X \cdot t') \qquad (2.3)$$

donde γ es una constante que se debe aproximar a la unidad cuando ($v_X << c$).
Finalmente, tomando en cuenta lo dicho anteriormente sobre la simultaneidad de eventos, el tiempo no se mide con la misma escala en los dos sistemas de referencia y puede depender también de la posición, es decir la localización de los relojes en el espacio, asi que proponemos. . .

$$t = A \cdot t' + B \cdot x' \qquad (2.4)$$

donde A y B son constantes que deben tender a 1 y 0 respectivamene cuando $v << c$ para que la ecuación anterior se reduzca a la transformación clásica de Galileo : $t = t'$.

Igualemos las ecuaciones (2.2) y (2.2') y substituyamos (2.3) , (2.4) junto con $y = y'$, $z = z'$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2 \cdot (t')^2$$

$$\left[\gamma \cdot (x' + v_X \cdot t')\right]^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2 \cdot (A \cdot t' + B \cdot x')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2 \cdot (t')^2$$

y simplificando . . .

$$\left[\gamma^2 \cdot (v_X)^2 - c^2 \cdot A^2\right] \cdot t'^2 + \left(-2 \cdot c^2 \cdot A \cdot B + 2 \cdot \gamma^2 \cdot v_X\right) \cdot x' \cdot t' + \left(\gamma^2 - c^2 \cdot B^2\right) \cdot x'^2 = x'^2 - c^2 \cdot t'^2$$

$$\left(\gamma^2 - c^2 \cdot B^2\right) = 1$$

$$\left[\gamma^2 \cdot (v_X)^2 - c^2 \cdot A^2\right] = -c^2$$

$$\left(-2 \cdot c^2 \cdot A \cdot B + 2 \cdot \gamma^2 \cdot v_X\right) = 0$$

Resolviendo éste sistema para las incógnitas A , B y γ se obtiene :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v_X)^2}{c^2}}} \quad ; \qquad B = \frac{v_X}{c^2} \cdot \gamma \quad : \qquad A = \gamma$$

Llegamos asi a *la transformación relativista de coordenadas* , la cual es consistente con los postulados de la relatividad :

$$\begin{bmatrix} x = \gamma\cdot\left(x' + v_x\cdot t'\right) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\cdot\left(t' + \dfrac{v_x}{c^2}\cdot x'\right) \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Asi que si $v_x \ll c$, entonces el cociente $\dfrac{v_x}{c}$ es muy cercano a cero de modo que A y γ valen aproximadamente 1 y B tiende a cero, con lo cual se obtiene la transformación de Galileo

Aunque éstas ecuaciones de transformación consideran sólo el movimiento relativo de O' respecto a O en la dirección X,X' , si el movimiento relativo ocurre en la dirección Y,Y' o en la dirección Z,Z' ,con un análisis similar al anterior llegaríamos a :

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= \gamma\cdot\left(y' + v_y\cdot t'\right) \\ z &= z' \\ t &= \gamma\cdot\left(t' + \frac{v_y}{c^2}\cdot y'\right) \end{aligned} \qquad \text{ó} \qquad \begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \gamma\cdot\left(z' + v_z\cdot t'\right) \\ t &= \gamma\cdot\left(t' + \frac{v_z}{c^2}\cdot z'\right) \end{aligned}$$

Si queremos obtener las coordenadas (x', y', z', t') a partir de las coordenadas (x , y , z , t), basta con cambiar el signo de la velocidad relativa en cada caso, dado que para O' , el sistema O *es* el que se mueve en la dirección opuesta. Asi por ejemplo, para el movimiento relativo en la dirección X,X' quedaría:

$$\begin{bmatrix} x' = \gamma\cdot\left(x - v_x\cdot t\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\cdot\left(t - \dfrac{v_x}{c^2}\cdot x\right) \end{bmatrix} \qquad (2.5')$$

Otra característica notable de la transformación relativista de coordenadas: es *LINEAL* , (lo cual significa que no aparecen potencias de t o de x mayores que 1 como t^3 o x^2) . esta característica nos permite hacer una sencilla relación entre los diagramas espacio-tiempo de los sistemas O y O' .

Si partimos de las ecuaciones (2.5) , y recordamos que el eje X' del diagrama espacio-tiempo de O' se obtiene uniendo todos los eventos simultáneos para los cuales $t' = 0$, tenemos que . . .

$$x = \gamma\cdot\left[x' + v_x\cdot(0)\right] = \gamma\cdot x' \qquad \text{y} \qquad t = \gamma\cdot\left[(0) + \frac{v_x}{c^2}\cdot x'\right] = \gamma\cdot\left(\frac{v_x}{c^2}\cdot x'\right)$$

Combinando éstas dos relaciones se obtiene : $c\cdot t = \left(\frac{v_x}{c}\right)\cdot x$.

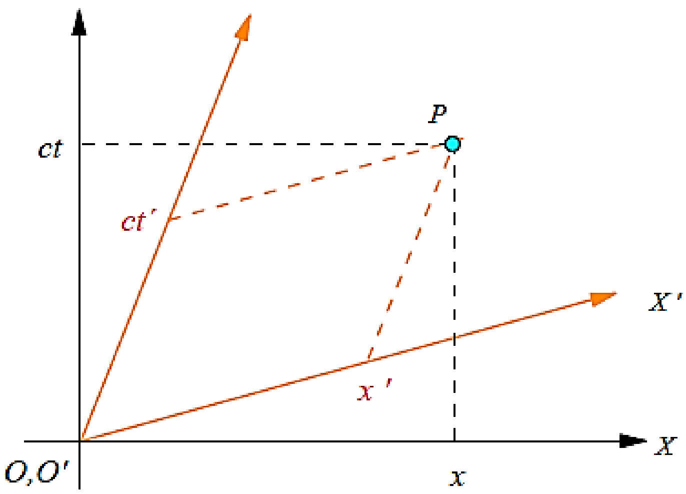
Si representamos esta ecuación en el diagrama espacio tiempo del observador O , obtendremos *una línea recta de pendiente* $\frac{v_x}{c}$.

De manera similar, el eje ct' del diagrama espacio-tiempo de O' , se obtiene substituyendo $x' = 0$ en (2.5)

$$x = \gamma\cdot\left[(0) + v_x\cdot t'\right] = \gamma\cdot\left(v_x\right)\cdot t' \qquad \text{y} \qquad t = \gamma\cdot\left[t' + \frac{v_x}{c^2}\cdot(0)\right] = \gamma\cdot\left(t'\right)$$

Combinando éstas dos relaciones se obtiene : $c\cdot t = \left(\frac{c}{v_x}\right)\cdot x$.

que representada en el diagrama espacio tiempo del observador O , es *una línea recta de pendiente* $\frac{c}{v_x}$



De ésta manera, los ejes X' y ct' representados en el diagrama de O tienen pendientes inversas entre si y por lo tanto *forman el mismo ángulo* respecto a X y ct respectivamente.
Entonces, desde el punto de vista del observador O , cualquier evento que ocurra en un punto P (x , t) *de su propio espacio tiempo* tiene un lugar y un tiempo distintos a los del observador O' , porque según él, el espacio tiempo de O' está "deformado" (suse ejes no son perpendiculares) y el. evento ocurre en otro lugar y en otro instante P (x' , t') .

¿ Y cuales son los conclusiones del observador O' ? . Pues bien, si partimos ahora de las ecuaciones de transformación (2.5 '), éste observador afirma que O *se mueve hacia la izquierda* a la velocidad $-v_x$ y si recordamos que el eje X' del diagrama espacio-tiempo de O se obtiene uniendo todos los eventos simultáneos para los cuales $t = 0$, tenemos que . . .

$$x' = \gamma\cdot\left[x - v_x\cdot(0)\right] = \gamma\cdot x \qquad ; \qquad t' = \gamma\cdot\left[(0) - \frac{v_x}{c^2}\cdot x\right] = -\gamma\cdot\left(\frac{v_x}{c^2}\cdot x\right)$$

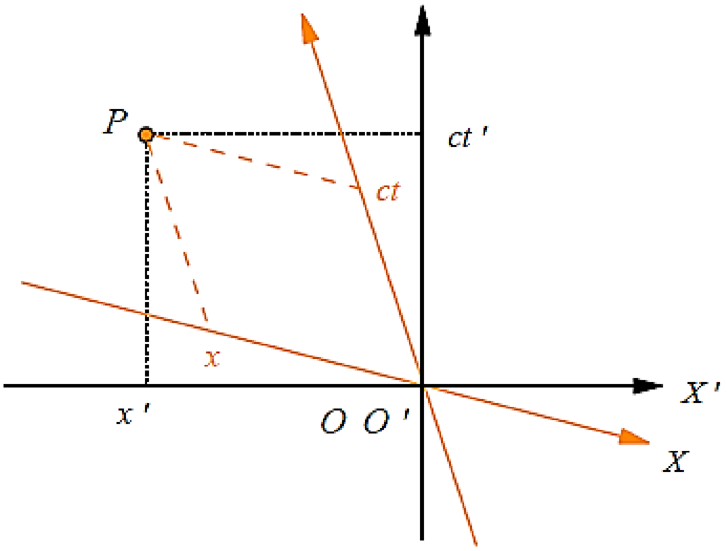
Substituyendo $x' = \gamma x$ en la otra ecuación se obtiene : $c\cdot t' = -\left(\frac{v_x}{c}\right)\cdot x'$.

Si representamos esta ecuación en el diagrama espacio tiempo del observador O' , obtendremos *una línea recta de pendiente* $-\left(\frac{v_x}{c}\right)$.

De manera similar, el eje ct de O , se obtiene substituyendo $x = 0$ en las ecuaciones (2.5 ')

$$x' = \gamma\cdot\left[(0) - v_x\cdot t\right] = -\gamma\cdot v_x\cdot t \qquad ; \qquad t' = \gamma\cdot\left[t - \frac{v_x}{c^2}\cdot(0)\right] = \gamma\cdot t$$

Combinando éstos dos resultados se obtiene la ecuación: $x' = -(v_x)\cdot t'$, es decir $ct' = \left(\frac{-c}{v_x}\right)\cdot x'$, que representada en el diagrama espacio tiempo del observador O', es *una línea recta de pendiente* $-\left(\frac{c}{v_x}\right)$



Asi que el observador O' llega exactamente a las mismas conclusiones del observador O . Cada uno de ellos afirmará que los ejes de su propio espacio-tiempo son perpendiculares entre si y que son oblicuos los ejes espacio-tiempo del otro observador móvil, es decir que sus escalas de longitud y tiempo están "deformadas" respecto a las suyas propias y por lo tanto sus metros y relojes no asignarán los mismos valores a los intervalos medidos de espacio o de tiempo, *aunque éstos se refieran a los mismos eventos*. ¿Cual de los dos observadores tiene la razón ?.

Pues bien, si consideramos que la representación de cada eje del espacio-tiempo para ambos observadores O y O' se obtiene de la transformación relativista de coordenadas (ecuaciones 2.5 y 2.5 ') y que ésta es consistente con los postulados de la Relatividad Especial, la conclusión inevitable es que *ambos observadores tienen razón en sus afirmaciones respecto al otro observador*. Cada uno de ellos asume estar en un sistema de referencia inercial en reposo y desde su punto de vista todos los demás sistemas inerciales se mueven respecto al suyo, causando que los únicos metros y relojes que no le parecen "deformados" son los que están en reposo en su propio sistema de referencia.

Entonces, tanto O como O' pueden colocar relojes sincronizados en todos los puntos de sus respectivos sistemas de coordenadas, usando alguno de los métodos de sincronización que señalamos anteriormente y por lo tanto, cada observador podrá leer (medir) las coordenadas de espacio y tiempo de un evento dado, en términos de los metros y relojes de ambos sistemas y *comparar* sus lecturas.

Bibliografía

- Serway, R. A., Moses, C. J., & Moyer, C. A. (2005). *Física moderna* (3a ed.). Thomson.
- Ferreira, P. (2013). *Fundamentos de la teoría de la Relatividad Especial*. Disponible en https://lc.fie.umich.mx/~pferrei/relativ_es/Relatividad%20Especial.pdf.